

Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA
Engenharia Eletrônica

Projeto de um Conversor A/D de Baixo Consumo para Aplicações de Alta Resolução

Autor: José Alberto Alves de Andrade
Orientador: Prof. Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Brasília, DF
2014



José Alberto Alves de Andrade

Projeto de um Conversor A/D de Baixo Consumo para Aplicações de Alta Resolução

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Universidade de Brasília - UnB

Faculdade UnB Gama - FGA

Orientador: Prof. Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Coorientador: –

Brasília, DF

2014

José Alberto Alves de Andrade

Projeto de um Conversor A/D de Baixo Consumo para Aplicações de Alta Resolução/ José Alberto Alves de Andrade. – Brasília, DF, 2014-

87 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade de Brasília - UnB
Faculdade UnB Gama - FGA , 2014.

1. Conversor A/D. 2. Transformada Wavelet. I. Prof. Dr. Sandro Augusto Pavlik Haddad. II. Universidade de Brasília. III. Faculdade UnB Gama. IV. Projeto de um Conversor A/D de Baixo Consumo para Aplicações de Alta Resolução

CDU 02:141:005.6

José Alberto Alves de Andrade

Projeto de um Conversor A/D de Baixo Consumo para Aplicações de Alta Resolução

Monografia submetida ao curso de graduação em (Engenharia Eletrônica) da Universidade de Brasília, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em (Engenharia Eletrônica).

Trabalho aprovado. Brasília, DF, 20 de novembro de 2014:

**Prof. Dr. Sandro Augusto Pavlik
Haddad**
Orientador

Prof. José Edil de M.
Convidado 1

Prof. Dr. Wouter A. Serdijn
Convidado 2

Brasília, DF
2014

*Esse trabalho é dedicado à minha família,
por todo o investimento em tempo, saúde, educação
e amor que me foi provido.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por todas as coisas boas em minha vida, a meus pais, por toda a dedicação que tem a mim e a minha irmã, a meus amigos pelo apoio e ajuda durante essa jornada e ao professor Sandro Haddad pela indicação deste trabalho.

*“Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis.
(René Descartes)*

Resumo

Este trabalho procura mostrar um conjunto de ferramentas de análise de sinais baseadas na Transformada *Wavelet* a serem utilizadas possibilitar a implementação de um sistema de amostragem para conversores A/D de baixo consumo de potência. Isso será feito através da obtenção da amplitude do sinal e da extração do expoente de Lipschitz. Este expoente caracteriza o comportamento singular de uma função dentro de um intervalo de tempo. Além disso, a Transformada *Wavelet* tem a capacidade de detectar singularidades e pontos de inflexão. Estas informações permitem localizar o sinal no tempo e possibilitar sua recuperação em meio digital. Para viabilizar a extração destes parâmetros, será utilizada a toolbox Continuous Wavelet 1-D, que faz parte do conjunto de aplicações do ambiente Matlab r2008a®. Um modelo do sistema proposto será descrito em diagrama de blocos através da ferramenta Simulink. Dele, pode-se abstrair alguns blocos essenciais para implementar o sistema a nível de circuito usando a ferramenta *Cadence Virtuoso*. Também será mostrado um breve estudo sobre como recuperar o sinal amostrado. Como exemplo de aplicação, o algoritmo de amostragem proposto será aplicado à um sinal de Eletrocardiograma sintético gerado em ambiente Matlab. Outros sinais serão aplicados ao sistema desenvolvido em Simulink e reconstruídos a partir do algoritmo de recuperação proposto para verificar o erro entre o sinal obtido e o original. Também será mostrado o comportamento do circuito obtido com um sinal senoidal como estímulo.

Palavras-chaves: Conversor A/D. Transformada Wavelet. Expoente de Lipschitz.

Abstract

This work shows some methods to signal analysis based on Wavelet Transform to be used to provide an implementation of a sampler system to low power A/D converters. It is possible through sampling of signal's amplitude and its Lipschitz exponent. This exponent denotes the singular behavior of a function in a time interval. Furthermore Wavelet Transform is able to detect singularities and inflexion points. This information is able to locate a signal in time and its recovery in digital way. It will be used the Continuous Wavelet 1-D toolbox and Simulink from Matlab to obtain a viable solution. Through the models obtained from Matlab, it is possible to build a system in circuit level using Cadence Virtuoso tool. It will also be presented a brief study about how to recover the sampled signal. As an example, the system will be stimulated using a synthetic Electrocardiogram generated by Matlab. Another signals will be applied in the Simulink model and recovered through the proposed algorithm to verify error between original and recovered signal. It will also be shown the behavior using a sinusoidal stimulus.

Key-words: A/D Converter. Wavelet Transform. Lipschitz Exponent.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	17
	Introdução	17
1.1	Objetivos	18
1.2	Justificativa	18
I	REFERENCIAL TEÓRICO	21
2	PRINCÍPIOS BÁSICOS DE CONVERSORES A/D	23
3	ANÁLISE DE SINAIS E TRANSFORMADA DE FOURIER	27
3.1	<i>Short Time Fourier Transform (STFT)</i>	29
4	TRANSFORMADA WAVELET	31
4.1	<i>Módulus Máxima</i>	33
4.2	<i>Vanishing Moments</i>	33
5	EXPOENTE DE LIPSCHITZ	35
5.1	Estimando o expoente de Lipschitz	36
II	METODOLOGIA	39
6	IDENTIFICAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS DE UM SINAL	41
7	ALGORÍTMO PROPOSTO PARA O CONVERSOR	43
8	MODELAGEM DO SISTEMA EM SIMULINK	47
9	SISTEMA A NÍVEL DE CIRCUITO	51
9.1	Circuito Logaritmo	51
9.2	Circuito Multiplicador e Divisor	51
9.3	Circuito para Cálculo do Expoente de Lipschitz	53
9.4	Circuito de Detecção de Borda e Amostragem	54
10	RECONSTRUÇÃO DO SINAL	57
10.1	Elaborando um aproximador Baseado em Função Seno	59

III	RESULTADOS E DISCUSSÃO	63
11	RESULTADOS	65
11.1	Detecção de <i>Zero-Crossing</i>: Localizando Picos e Inflexões	65
11.2	Amostrando a Amplitude e o Expoente de Lipschitz	66
11.3	Exemplo de Amostragem de um Sinal de Eletrocardiograma	68
11.4	Amostragem e Recuperação de Sinais	70
11.5	Sistema a Nível de Circuito	73
12	DISCUSSÃO	83
13	CONCLUSÃO	85
	Referências	87

1 Introdução

Com o crescimento da capacidade dos dispositivos digitais ao longo das últimas décadas, houve um aumento nas possibilidades de processamento de dados em meio digital. Atualmente, muitas tarefas que eram executadas por intermédio de circuitos analógicos, como filtros, operações aritméticas e processamento avançado de sinais passaram a ser realizadas por dispositivos digitais, motivados principalmente pela facilidade em se implementar algoritmos complexos a baixo custo.

O pensamento de que atualmente tudo pode ser feito em meio digital caiu em senso comum de muitas pessoas. Entretanto, diversos processos exigem algum processamento analógico, dos quais os sistemas digitais dependem fortemente, como gerenciamento de energia e condicionamento de sinais. Além disso, em algum momento, o meio digital necessitará de uma interface com o mundo real, que é medido com grandezas analógicas (ALLEN; HOLBERG, 2002).

Neste cenário, o Conversor Analógico-Digital (A/D) e o Conversor Digital-Analógico (D/A) têm o papel de ser a interface entre o mundo real e o digital e do digital para o real respectivamente. Em especial, os conversores A/D têm em dois processos básicos em todas as suas topologias. O primeiro deles é amostrar o sinal em um instante de tempo. O segundo é quantizar o sinal amostrado para que seja possível gerar uma codificação digital. Os conversores A/D tradicionais seguem ao critério de Nyquist. Este critério afirma que para se recuperar um sinal com o mínimo de perdas, a frequência de amostragem deve ser maior que duas vezes a máxima frequência do sinal.

Dessa forma, os conversores tradicionais precisam sempre estar amostrando o sinal em uma taxa de amostragem fixa para garantir que ele opere sob o critério de Nyquist. Este modo de operar influencia no consumo de potência do dispositivo que, para algumas aplicações, pode ser uma condição crítica. Além disso, os conversores de maior resolução são baseados em oversampling, ou sobre-amostragem, onde deve-se amostrar o sinal tipicamente de 20 a 512 vezes o critério de Nyquist (CARUSONE; JOHNS; MARTIN, 2012), contribuindo ainda mais para o consumo de potência do dispositivo. Neste contexto, este trabalho propõe um modelo de conversor cujo sistema de amostragem se baseia em eventos que caracterizem o sinal e permitam uma menor taxa de amostragem e um menor consumo.

1.1 Objetivos

Este projeto tem como objetivo principal o desenvolvimento de um modelo de um sistema de amostragem visando um baixo consumo de potência para aplicações de alta resolução. Para tanto, pretende-se extrair informações sobre o comportamento do sinal a ser amostrado através da Transformada *Wavelet* de tempo contínuo. Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Realizar a detecção de pontos críticos em sinais, tais como mínimos, máximos, singularidades e pontos de inflexão;
- Obter o expoente de Lipschitz através da Transformada *Wavelet* para descrever o comportamento de uma função dentro de um intervalo de tempo;
- Obter um modelo em nível de algoritmo para realizar a amostragem e representação de um sinal para o modelo de conversor proposto;
- Obter um modelo funcional em nível de diagrama de blocos do conversor proposto;
- Estudo de metodologia para recuperação do sinal;
- Implementar o modelo proposto a nível de transistor utilizando a ferramenta de Electronic Design Aided (EDA) Cadence Virtuoso;

1.2 Justificativa

Os conversores A/D clássicos necessitam de uma taxa fixa de amostragem que deve obedecer ao critério de Nyquist. No entanto, este critério considera apenas o pior caso de amostragem, requerendo, assim, que o conversor sempre realize esta operação, mesmo quando o sinal a ser convertido para o meio digital esteja operando em frequências muito mais baixas que a máxima esperada. Desta forma, quanto maior a taxa de amostragem de um conversor, maior a quantidade de energia gasta. Por outro lado, existe um erro associado ao processo de quantização ligado à resolução do conversor. Este erro é minimizado na medida em que se aumenta a resolução do conversor, exigindo sobre-amostragem para alguns modelos de conversor A/D ou de módulos adicionais para outras topologias, exigindo mais consumo de energia. A justificativa para este trabalho é a busca por um modelo de amostragem e conversão que permita amostrar apenas as informações necessárias de um sinal de forma que se possa recuperar suas características com um alto grau de semelhança. A Transformada *Wavelet*, que é largamente aplicada como forma de comprimir informações em imagens ([MALLAT; HWANG, 1992](#)), poderá fornecer estas informações e permitir um controle do processo de amostragem que leva em conta o

comportamento do próprio sinal. Além disso, por meio das técnicas de aproximação utilizadas por (HADDAD; SERDIJN, 2009) pode-se implementar uma Transformada *Wavelet* através de um banco de filtros com baixo consumo de potência.

Parte I

Referencial Teórico

2 Princípios Básicos de Conversores A/D

Como foi dito anteriormente, uma conversão A/D é constituída de basicamente dois processos: amostragem e quantização. A Fig. 1 mostra um diagrama de blocos típico de um processo de conversão A/D. Verifica-se a existência de mais dois blocos. Um deles é um filtro anti-aliasing, que garante a frequência abaixo da frequência mínima de amostragem de Nyquist. O outro bloco se refere ao sistema digital que irá processar o sinal convertido.

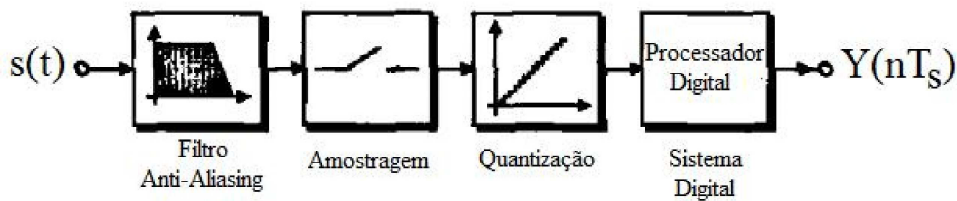


Figura 1 – Diagrama de blocos típico para um processo de conversão A/D. Adaptado de (ALLEN; HOLBERG, 2002).

O processo de amostragem costuma ser do tipo *sample and hold*, onde o sinal é amostrado em um tempo t_i e mantido durante o período de quantização, que depende da topologia utilizada. O processo de quantização por sua vez compara o valor amostrado com níveis bem delimitados de sinais de referência. Este processo gera um erro associado ao número de níveis chamado de erro de quantização. Este erro corresponde a metade do valor do menor nível de quantização ou também a 0.5 LSB (*Least Significant Bit*). A Fig. 2 ilustra o efeito da quantização de um sinal de entrada analógica para um conversor A/D de 3 bits. Verifique também o comportamento do erro de quantização de 0.5 LSB.

A Equação 2.1 mostra o valor de um nível de quantização ou V_{LSB} , dado pela razão entre o maior valor de entrada do conversor (V_{REF}) e o número de níveis de quantização. Uma forma de caracterizar este erro de quantização é através da relação sinal ruído ou SNR (*Signal Noise Ratio*) (CARUSONE; JOHNS; MARTIN, 2012), que relaciona a amplitude do sinal de entrada com o ruído de quantização. Esta relação é mostrada na Eq. 2.2.

$$V_{LSB} = \frac{V_{REF}}{2^N} \quad (2.1)$$

$$SNR_{dB} = 6,02N + 1,76 \quad (2.2)$$

Na Equação 2.1, N é o número efetivo de bits do conversor, com 2^N níveis de quantização. O valor da SNR é dado em dB (decibéis) e quanto maior é o seu valor, menor será a influencia do ruído de quantização no sinal convertido, ou seja, maior será a sua

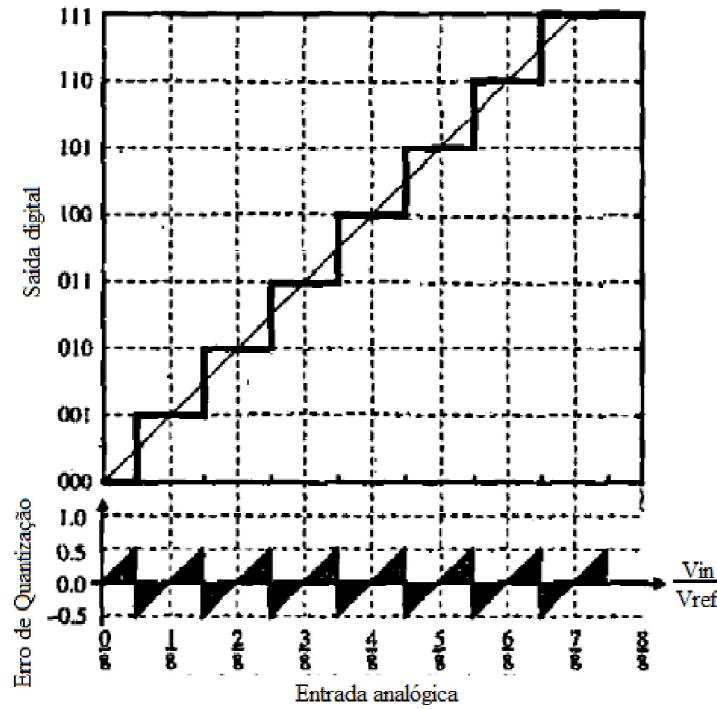


Figura 2 – Quantização de uma entrada analógica para um conversor de 3 bits (ALLEN; HOLBERG, 2002).

resolução. Neste contexto, os conversores baseados em sobre-amostragem ou *oversampling* apresentam as maiores resoluções de bits perante os outros conversores. Para um conversor desta classe, a SNR dada pela Eq. 2.3, que leva em conta o efeito da sobre-amostragem.

$$SNR_{dB} = 6,02N + 1,76 + 20 \log \left(\frac{f_s}{2f_0} \right) \quad (2.3)$$

Na Equação 2.3, f_s é a frequência de sobre-amostragem e f_0 é a maior frequência do sinal (multiplicada por 2 em razão do critério de Nyquist). O Conversor A/D Sigma-Delta é o representante desta categoria. Ele é composto por um modulador, que converte o sinal analógico em um conjunto de pulsos modulados em frequência e um filtro decimador, que converte os pulsos gerados em codificação binária. Este conversor consegue chegar a altas resoluções por meio de *noise shapping* — que leva o ruído para frequências mais altas que a do sinal amostrado — da ordem do conversor e do próprio *oversampling*. A Figura 3 mostra a SNR de um conversor A/D Sigma-Delta de em função do *oversampling* e de sua ordem. Utilizando a Equação 2.3 e os dados no gráfico da Fig. 3 podemos verificar que para um conversor A/D Sigma-Delta de ordem 2, sua SNR é de aproximadamente 80dB para um *oversampling* de 50 vezes a frequência de amostragem de Nyquist. Neste caso, sua resolução de cerca de 7 bits. Para um conversor de ordem 5, entretanto, com mesmo valor de *oversampling*, sua SNR é cerca de 150dB. Assim sua resolução é próxima a 18bits. Estima-se que para que o conversor A/D Sigma-Delta de ordem 2 tenha ao menos 14 bits

de resolução, é necessário amostrar a uma frequência maior que 1500 vezes a frequência de Nyquiste. Serão discutidos a seguir alguns aspectos relacionados à análise de sinais de forma a obter outras características que permitam representá-lo.

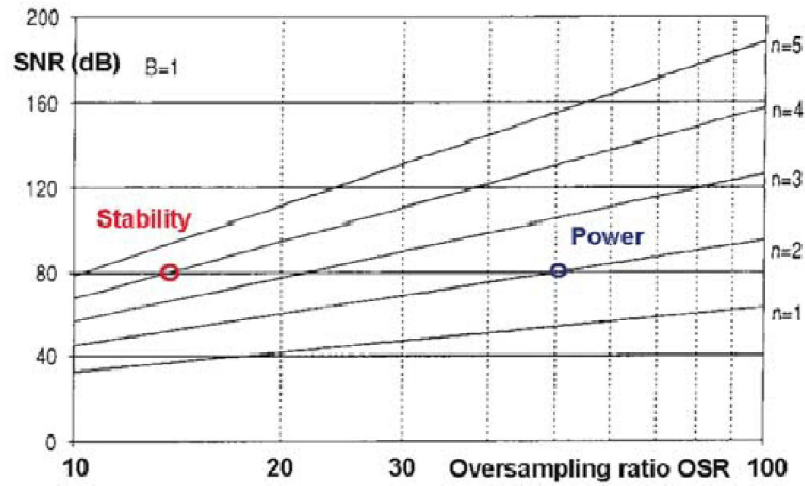


Figura 3 – Desempenho de um conversor A/D com relação ao oversampling, à SNR e a sua ordem.

3 Análise de Sinais e Transformada de Fourier

O principal objetivo no que diz respeito a área de Análise de Sinais é poder extrair informações importantes do sinal estudado. Isto é normalmente feito a partir de uma transformada que leva o sinal de um domínio A para B . Neste contexto, muitas transformadas integrais são utilizadas para realizada esta operação. Uma transformada integral consiste em uma função descrita pela Eq. 3.1 e pode ser vista como um produto interno entre duas funções contínuas, análoga ao produto interno vetorial (BOYCE; DIPRIMA, 2011).

$$F(s) = \int K(s, t) f(t) dt \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1, $K(s, t)$ é chamada de núcleo ou *kernel* da transformada e é responsável por levar a função de entrada $f(t)$ do domínio t para s . Uma função deste tipo que é largamente utilizada para o estudo de sinais é a Transformada de Fourier (Eq. 3.2) que permite analisar um sinal $s(t)$ no domínio da frequência.

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} \quad (3.2)$$

onde função $S(\omega)$ é a função $s(t)$ no domínio da frequência. Verifique que na Equação 3.2, o *kernel* da transformada é uma exponencial complexa, que consiste em uma combinação linear das funções seno e cosseno. Isso significa que a Transformada de Fourier projeta o sinal $s(t)$ em componentes de senos e cossenos (tal como a série de Fourier) (MALLAT, 1999). Para ilustrar esta afirmação, suponha os sinais descritos nas Equações 3.3 e 3.4. Usando a ferramenta de álgebra computacional Matlab R2008a, realizou-se a transformada dos mesmos e se obteve os gráficos mostrados na Fig. 4.

$$s_1(t) = 0.3 \sin(2\pi 100t) + 3 \cos(2\pi 150t) \quad (3.3)$$

$$s_2(t) = \begin{cases} 0.7 \sin(2\pi 100t) & \text{se } 0 \leq t < 0.05; \\ 3 \cos(2\pi 500) & \text{se } 0.05 < t. \end{cases} \quad (3.4)$$

Verifica-se que tanto para a Fig. 4a quanto para a Fig. 4b, nos gráficos correspondentes ao domínio da frequência, existem dois picos em cada um correspondente a justamente as frequências presentes em cada sinal (100Hz e 150Hz para a Fig. 4a e 100Hz e 500Hz para a Fig. 4b). Apesar de permitir tirar informações relevantes da Transformada

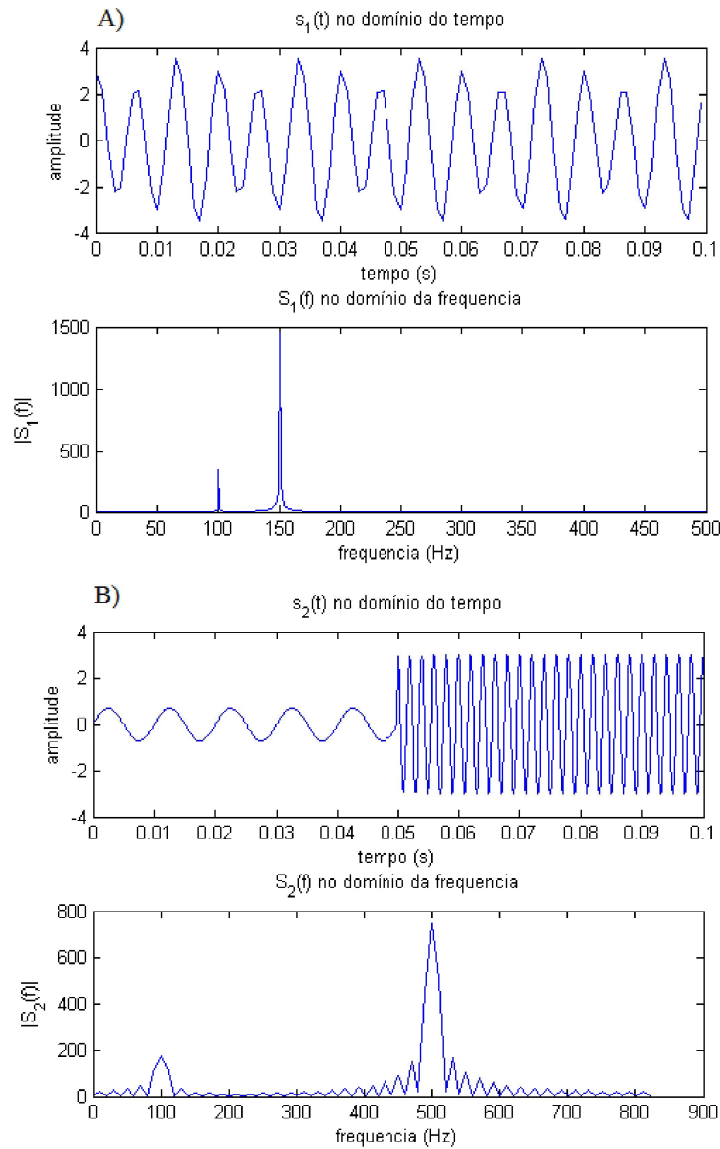


Figura 4 – Em a), são mostrados os gráficos de tempo e frequência para o sinal $s_1(t)$. Em b), os gráficos de tempo e frequência correspondem a $s_2(t)$.

de Fourier, ela suprime informações sobre mudanças no tempo, espalhando-as no espectro de frequência. Isso pode ser verificado através da Fig. 4b, onde não podemos inferir, a partir do gráfico no domínio da frequência, quando o sinal assume quaisquer uma das frequências denotadas pelos pulsos. Assim, a Transformada de Fourier, permite descrever adequadamente sinais estacionários, que permanecem com as mesmas características por longos períodos. Porém, para sinais não estacionários, que são objeto de estudo neste trabalho, ela suprime informações importantes sobre mudanças no tempo. Como alternativa para a Transformada de Fourier para sinais não estacionários, (GARBOR, 1946) sugere uma função janelamento que permite realizar uma análise de tempo x frequência. Este método é conhecido como STFT e será apresentado a seguir.

3.1 Short Time Fourier Transform (STFT)

(GARBOR, 1946) estudava variações de frequência em sons ao longo do tempo. Ele introduziu uma função $g(t)$ real e simétrica em torno de $t = u$ tal que $\|g(t)\| = 1$. Esta função é chamada de janelamento e adaptada à Transformada de Fourier tal como a Eq. 3.5, permite realizar uma Transformada de Fourier local na vizinhança de u . Para ilustrar o funcionamento da *STFT*, a Fig. 5 mostra o espectro de frequências da função denotada na Eq. 3.6. Na Figura 5, a função de janelamento $g(t)$ usada foi uma gaussiana com um suporte igual a 0.01. Verifique que o espectro de frequência em função do tempo aumenta de forma exponencial com o passar do tempo.

$$STFT(u, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)g(t - u)e^{-j\omega t} dt \quad (3.5)$$

$$s(t) = 0.3 \sin(2\pi e^{35t}) \quad (3.6)$$

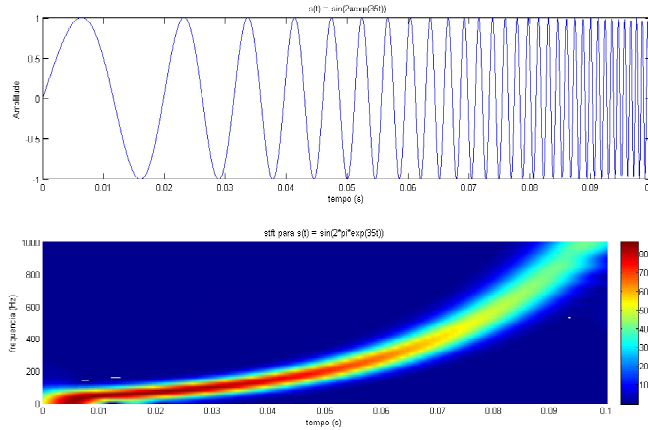


Figura 5 – Uma função senoidal com frequência crescendo de forma exponencial foi analisada através da STFT.

A função $g(t)$ possui uma janela fixa no tempo. Assim, a *STFT* também possui uma resolução fixa tanto no tempo quanto na frequência de forma que obedece ao Princípio da Incerteza de Heisenberg dado pela Eq. 3.7. Este princípio mostra que o aumento da resolução do sinal no tempo implica em uma perda de resolução na frequência e vice-versa. Desta forma, se um sinal $s(t)$ é praticamente estacionário, mas com pequenas perturbações, deve-se projetar a função janelamento para obter uma boa localização no tempo, ou na frequência, nunca em ambas ao mesmo tempo, de forma a capturar as características desejadas do sinal.

$$\Delta t \Delta \omega > \frac{1}{2} \quad (3.7)$$

com

$$\Delta t = \sqrt{\frac{\int t^2 |g(t)|^2 dt}{\int |g(t)|^2 dt}} \quad (3.8)$$

$$\Delta \omega = \sqrt{\frac{\int \omega^2 |G(\omega)|^2 d\omega}{\int |G(\omega)|^2 d\omega}} \quad (3.9)$$

4 Transformada *Wavelet*

Como alternativa para janelamento fixo proposto por (GARBOR, 1946) na *STFT*, a Transformada *Wavelet* se adéqua bem a análise de tempo e frequência pois apresenta uma característica de multiresolução. Isso significa que ela permite variar a resolução no tempo e na frequência para melhor ressaltar as características de um sinal obedecendo, entretanto, ao princípio da incerteza apresentado na Eq. 3.7. A resolução no tempo é incrementada de acordo com a faixa de frequência analisada. Assim, defini-se que $\Delta\omega$ é proporcional à ω tal como mostra a Eq. 4.1.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = c \quad (4.1)$$

Na prática, tanto a *STFT* quanto a Transformada *Wavelet*, podem ser analisadas como um banco de filtros passa-banda com frequências centrais específicas. Para a Transformada *Wavelet*, entretanto, o espaço entre as frequências centrais de cada filtro obedece a proporcionalidade da Eq. 4.1. Além disso, a largura da banda de cada filtro possui uma constante relativa de banda assim chamada de constante-Q. A Figura 6 mostra uma comparação entre as bandas cobertas por um banco de filtros que implementa uma *STFT* e uma Transformada *Wavelet*.

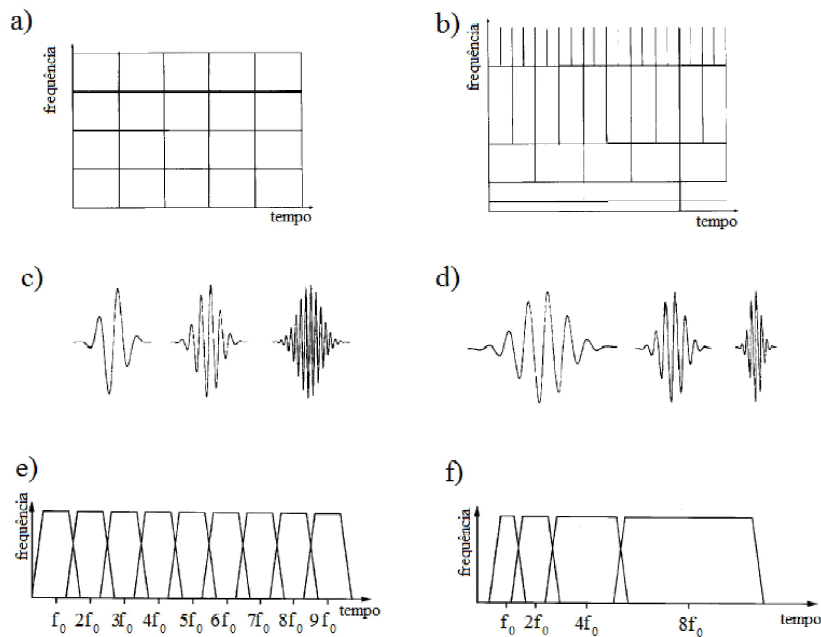


Figura 6 – Em a) e b) mostra as relações de janelamento no plano tempo-frequência para a *STFT* e a Transformada *Wavelet* respectivamente. Em c) e d) vê-se a função janelamento aplicada a *STFT* e a Transformada *Wavelet*. e) e f) apresenta a banda que cada base analisa.

A Transformada *Wavelet* é definida conforme mostra a Eq. 4.2. Seu mecanismo de multiresolução consiste em decompor um sinal através de bases que são bem localizadas no tempo ou na frequência. Isso é feito através de contração e alongamento de uma base *wavelet*, como visto na Fig. 6d. Uma *wavelet* é justamente uma pequena onda $\psi(t)$ que deve obedecer aos critérios mostrados nas Eq. 4.3 e 4.4.

$$WT(\tau, a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi\left(\frac{t - \tau}{a}\right) dt \quad (4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (4.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega = C_{\Psi} \quad (4.4)$$

Na Equação 4.2, a é chamada de escala e é igual a 2^k com k sendo um número natural. Como se pode perceber, ela descreve uma operação de convolução no domínio do tempo, ou seja, é um produto entre as funções $S(\omega)$ e $\Psi(\omega)$ no domínio da frequência. Dessa forma, se justifica tratar a Transformada *Wavelet* como um filtro, cuja resposta ao impulso é $\Psi(j\omega)$.

A Equação 4.3 diz que a wavelet $\psi(t)$ precisa ser oscilatória e ter média igual a zero. A Equação 4.4 implica que a *wavelet* deve ter uma componente na frequência zero (MALLAT, 1999). Como exemplo de análise através da Transformada *Wavelet*, a Fig. 7 mostra um sinal com características semelhantes ao sinal da Eq. 3.4 sendo decomposto de acordo com a escala da *wavelet*. Verifique que a análise permite realçar o evento de transição entre as frequências quando a escala a da wavelet é menor, pois assim a resolução no tempo é menor que na frequência.

A *wavelet* $\psi(t)$ a ser usada neste trabalho será da família das gaussianas por apresenta uma boa relação de resolução tempo-frequência (HADDAD; SERDIJN, 2009). As *wavelets* gaussianas são resultado da derivada de n -ésima ordem de uma função gaussiana e são definidas conforme a Eq. 4.5. Neste trabalho, as gaussianas utilizadas serão a derivada primeira e a segunda.

$$\psi(t) = C_n \frac{d^n e^{-t^2}}{dt^n} \quad (4.5)$$

A Transformada *Wavelet* possui várias propriedades. Porém, duas delas serão de grande importância para resolver o problema proposto. Estas propriedades são o *Modulus Maxima, vanishing moments*.

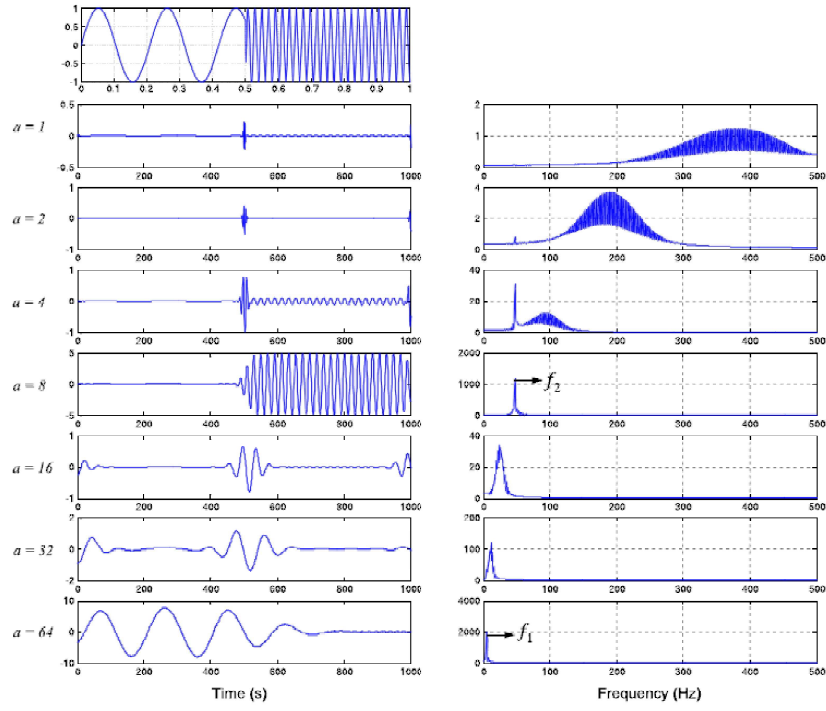


Figura 7 – Decomposição de um sinal com transição abrupta de frequência f_1 para f_2 . Note que o comportamento do sinal decomposto é de um banco de filtros passa-banda. Adaptado de (HADDAD; SERDIJN, 2009).

4.1 Módulo Máxima

Segundo (MALLAT, 1999), se em algum ponto (t_0, a_0) tal que o valor de $|WT(t, a_0)| < |WT(t_0, a_0)|$ onde t pertença a uma vizinhança direita ou esquerda de t_0 e $|WT(t, a_0)| \leq |WT(t_0, a_0)|$ para t pertencente ao outro lado da vizinhança de t_0 , $|WT(t_0, a_0)|$ é chamado de *Módulo Máxima*. Este ponto satisfaz a condição mostrada na Eq. 18. Além disso, a linha $a(t)$ no plano tempo-escala da análise pela Transformada Wavelete é chamada de linha máxima onde a condição da Eq. 4.6 é satisfeita.

$$\frac{\partial WT(t_0, a_0)}{\partial t} = 0 \quad (4.6)$$

4.2 Vanishing Moments

Diz-se que uma *wavelet* tem n *Vanishing Moments* se sua amplitude passa por zero n vezes. Além disso, ela satisfaz a Eq. 4.7 para $0 \leq k < n$. Assim, se uma *wavelet* tem n *Vanishing Moments*, então ela pode ser vista como um operador diferencial multiescala.

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad (4.7)$$

Uma aplicação interessante para a *wavelet* como operador diferencial é que, depen-

dendo do valor de n , é possível localizar os pontos críticos (máximos, mínimos e inflexões) de um sinal $s(t)$ (HADDAD; SERDIJN, 2009). A Figura 8 mostra um exemplo usando uma *wavelet* gaussiana de primeira ordem (derivada gaussiana com 1 *Vanishing Moment*) onde é possível notar que o Módulo da Transformada igual a zero indica a posição de máximos e mínimos de um sinal.

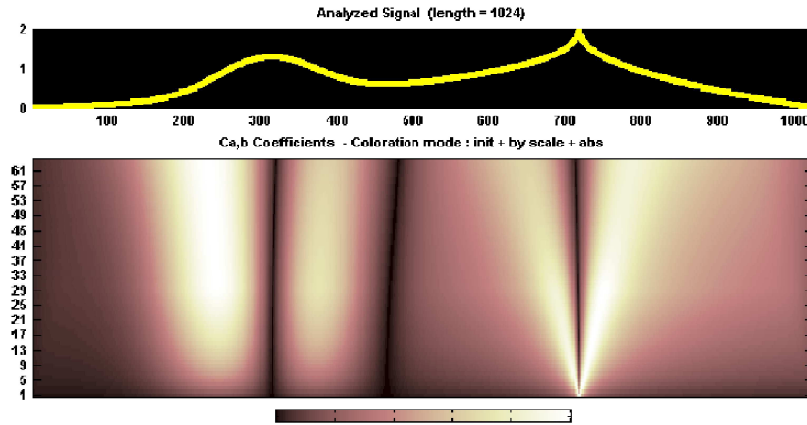


Figura 8 – A parte superior da figura mostra o sinal a ser analisado. Na parte inferior, é mostrado o módulo das escalas de 1 à 64. Adaptado de (HADDAD; SERDIJN, 2009).

A propriedade apresentada pela Eq. 4.7 fornecerá a este trabalho a capacidade de estimar o expoente de Lipschitz, que é uma característica essencial a ser extraída do sinal pelo conversor A/D proposto neste trabalho.

5 Expoente de Lipschitz

Uma forma de medir a regularidade uniforme de uma função é através do expoente de Lipschitz (MALLAT, 1999). Isso é feito dentro de intervalos de tempos, porém, em torno de um ponto $t = \nu$. Assim, se um sinal $s(t)$ é singular em $t = \nu$, sendo não diferenciável nesse ponto, então o expoente de Lipschitz em ν irá apresentar um comportamento singular. O sinal $s(t)$ pode ser aproximado por um polinômio $p_\nu(t)$, dentro de um intervalo $[a, b]$ com $\nu \in [a, b]$, com um erro tal que

$$e(t) = |s(t) - p_\nu(t)| = K|t - \nu|^\alpha \quad (5.1)$$

em que $e(t)$ é o erro de aproximação entre $s(t)$ e $p_\nu(t)$ e α é o expoente de Lipschitz. Se o valor de K independe do valor de ν , então $s(t)$ é um Lipschitz uniforme. Neste contexto, suponha que $s(t)$ seja m vezes derivável e que sua série de Taylor dada pela Eq. 5.2, também seja. Isso significa que a m -ésima derivada de $s(t)$ produz um limite superior sobre o erro $e(t)$ (MALLAT, 1999). O expoente de Lipschitz refina o limite superior por meio de um valor de expoente não inteiro.

$$p_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\nu)}{k!} (t - \nu)^k \quad (5.2)$$

Como exemplo, (HADDAD; SERDIJN, 2009) propõe a análise do sinal descrito pela Eq. 5.3, representada pela Fig. 9, delimitada pelos intervalos $0 \leq t < 1$ e $1 < t \leq 2$. Esta função, com um expoente de Lipschitz α , é regular exceto em $t = 1$. Assim, (HADDAD; SERDIJN, 2009) afirma que, conhecendo o comportamento de $s(1)$, é suficiente para descrever $s(t)$ dentro do intervalo de tempo. Isso significa que toda a informação do sinal em torno da singularidade pode ser compactada através do expoente de Lipschitz. Esta afirmação tem grande importância para este trabalho, pois servirá de parâmetro para estimar o comportamento do sinal amostrado dentro de um intervalo de tempo.

Neste trabalho, o expoente de Lipschitz será estimado a partir da evolução do módulo da Transformada *Wavelet* ao longo das escalas. Este processo será descrito a seguir.

$$s(t) = 1 - |1 - t|^\alpha \quad (5.3)$$

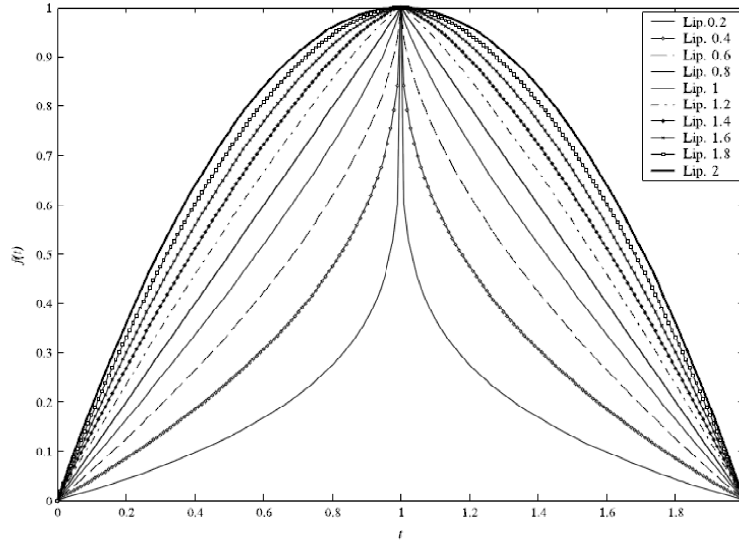


Figura 9 – Comportamento para o sinal $s(t)$ para um expoente de Lipschitz variando de 0.2 a 2. Adaptado de (HADDAD; SERDIJN, 2009).

5.1 Estimando o expoente de Lipschitz

Anteriormente, foi visto que a propriedade dos *vanishing moments* de uma *wavelet* tornam a Transformada um operador diferencial. Suponha agora que o um sinal $s(t)$ pode ser aproximado tal como a Eq. 5.4. Realizando a Transformada *Wavelet* deste sinal e através da propriedade apresentada pela Eq. 4.7, pode-se chegar ao resultado mostrado na Eq. 5.5.

$$s(t) = p_v(t) + e(t) \quad (5.4)$$

$$WT[s(t)] = WT[p_v(t)] + WT[e(t)] = WT[e(t)] \quad (5.5)$$

De acordo com a Equação 5.5, a Transformada *Wavelet* do sinal $s(t)$ é igual a transformada do erro $e(t)$. Este fenômeno é conhecido como supressão do polinômio. Pela Equação 5.1, sabe-se que há uma relação entre o erro $e(t)$ e o expoente de Lipschitz. Para Calcular o expoente de Lipschitz de um sinal, a *wavelet* base deve possuir $n > \alpha$ vanishing moments. Em uma vizinhança de um ponto ν , o valor de $|WT[s(t)]|$ ao longo das escalas decai de acordo com o decaimento do *Módulus Máxima* dentro de um cone de influencia tal como a Eq. 5.6. A função $s(t)$ é um Lipschitz uniforme na vizinhança de ν se e somente se existe uma constate $A > 0$ tal que $|WT[s(t)]|$ satisfaz a Eq. 5.7 (MALLAT, 1999).

$$|t - \nu| = Ca \quad (5.6)$$

$$|WT[s(t)]| = Aa^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (5.7)$$

onde A é uma constante. A Equação 5.7 pode ser provada por meio da desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle s(t), \psi(t) \rangle| \leq \|s(t)\| \|\psi(t)\|$. Este resultado pode ainda ser linearizado tal como na Eq. 5.8. A Figura 8 mostrou um sinal analisado através da Transformada *Wavelet* usando uma gaussiana de primeira ordem, onde o módulo da transformada indicou a posição de singularidades, onde se destacam duas: uma com $\alpha = 2$ e outra com $\alpha = 0.5$. Verifique que para $\alpha = 2$, o valor do expoente é maior que o número de vanishing moments. Isso significa que foi possível identificar a posição da dos seus pontos de inflexão, porém, não é possível determinar o tipo de singularidade. Entretanto, para $\alpha = 0.5$, é possível determinar sua posição e o valor do próprio α .

$$\log_2 |WT[s(t)]| = \log_2 A + \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \log_2 a \quad (5.8)$$

Assim, por meio da Equação 5.8, o expoente de Lipschitz pode ser extraído fixando-se um tempo e derivando-se a logaritmo magnitude com respeito ao logaritmo das escalas, sendo o resultado subtraído de 0.5. A média do Lipschitz ao longo das escalas pode ser utilizada para inferir o comportamento local do sinal. A Figura 10 mostra uma superfície cujas amplitudes são o logaritmo na base 2 da Transformada *Wavelet* do sinal apresentado na parte superior da Fig. 8 usando uma gaussiana de segunda ordem. Note que, pelo gráfico, a evolução das escalas até antes da amostra 600 apresentam uma inclinação maior ao longo de $\log_2(a)$ do que após a amostra 600, pois as a função analisada apresenta um comportamento com singularidades mais fracas (mais regular) que as singularidades encontradas após esta amostra. Na prática, a análise do sinal ao longo das escalas será feito por meio de banco de filtros que implementam a Transformada *Wavelet*, em que cada filtro representa uma escala. Assim, o expoente de Lipschitz será uma aproximação desta derivação.

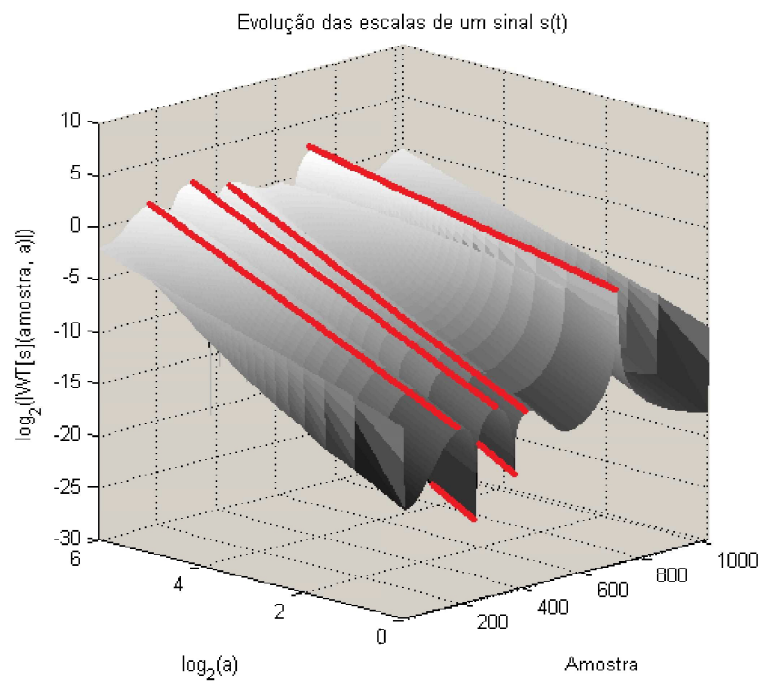


Figura 10 – Evolução do logaritmo na base 2 do módulo da Transformada *Wavelet* do sinal apresentado na Figura 8 usando uma gaussiana de segunda ordem.

Parte II

Metodologia

6 Identificação dos Pontos Críticos de um Sinal

Através das propriedades apresentadas acerca da Transformada *Wavelet*, as informações que podem ser obtidas, tanto no domínio do tempo quanto ao longo das escalas, permitem descrever características importantes do sinal analisado de forma que seja possível recuperá-lo a partir de menos informações que os conversores A/D de Nyquist.

Uma das aplicações das técnicas de diferenciação de funções em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral é a construção de gráficos a partir de pontos críticos, que são obtidos através da derivada primeira e segunda da função f desejada. As informações extraídas, junto à informação de dois pontos por onde a função passa — por exemplo, cruzamento com o eixo das ordenadas e com os da abscissa — permitem esboçar o gráfico da função com uma curva suave (feita a mão) sem a necessidade de se calcular todos os pontos a função (LEITHOLD, 1994). O conversor A/D proposto neste trabalho se baseia nesta aplicação. Se a derivada primeira de f é igual a zero em um valor de $t = \nu$, significa que o valor de $f(\nu)$ é um máximo ou um mínimo local. Já para a derivada segunda de f , quando esta é igual a zero em ν , ela indica que há um ponto de inflexão neste ponto, ou seja, que este ponto está entre um máximo e um mínimo local ou o contrário. Este mecanismo merece tratamentos adicionais para quando existir uma singularidade dentro do intervalo estudado da função f . Por exemplo, se f é descontínua ou é singular em ν , a derivada primeira de f não existe em ν .

No entanto, como foi visto anteriormente, graças a propriedade dos *vanishing moments* de uma base *wavelet*, a Transformada Wavelet se torna um operador diferencial de n -ésima ordem (para n *vanishing moments*). Assim, para uma base gaussiana de primeira ordem, pode-se localizar os pontos de máximos e mínimos de f tal como sua derivada primeira. O mesmo ocorre para a gaussiana de segunda ordem, em que é possível localizar os pontos de inflexão. Porém, uma possibilidade ainda mais interessante é a localização de descontinuidades e singularidades, uma vez que a Transformada *Wavelet* pode ser vista como um filtro, suavizando descontinuidades e singularidades. A Figura 11 mostra este efeito, onde um sinal tipo escada é convoluído com uma gaussiana e suas derivadas.

Localizando os máximos e mínimos de um sinal $s(t)$ pode-se ter um primeiro vislumbre acerca de seu comportamento. Unindo estes dados à informação sobre seu comportamento singular através do expoente de Lipschitz e sabendo a amplitude do sinal em algum ponto, é possível descrever o sinal analisado dentro de um determinado intervalo.

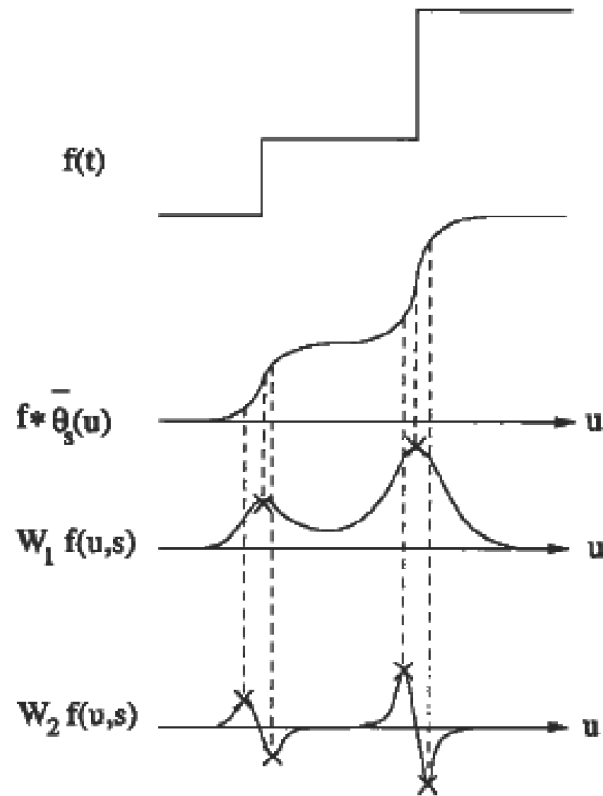


Figura 11 – Um sinal $f(t)$ é convoluído com uma função gaussiana $\theta(t)$ ($f * \theta(t)$) e tem suas descontinuidades suavizadas. A magnitude de $W_1 f(u, s)$ quando igual a zero indica um máximo ou mínimo local de $f * \theta(t)$. Para a magnitude de $W_2 f(u, s)$ igual a zero, encontram-se as inflexões. Adaptado de (MALLAT, 1999).

7 Algoritmo Proposto para o Conversor

Da mesma forma que um conversor A/D de Nyquist precisa amostrar a amplitude um sinal em um determinado instante de tempo t_i para convertê-lo para o domínio digital, o modelo proposto também necessitará amostrar a amplitude do sinal. Porém, a grande diferença para com os conversores tradicionais é sobre quando amostrar a amplitude do sinal e quais informações serão extraídas do mesmo. Neste contexto, as informações resultantes do processo de conversão serão:

- Amplitude média do sinal em um ponto de máximo, mínimo ou singularidade;
- Expoente de Lipschitz médio no ponto amostrado;
- Posição dos pontos de mínimos, máximos ou singularidades;
- Posição dos pontos de inflexão.

A amostragem da amplitude sinal é necessária para que seja possível determinar um valor de referencia no qual, ao reconstruir o sinal, se saiba qual é sua magnitude. O sinal a ser usado para determinar quando amostrar o sinal será obtido através das escalas da Transformada *Wavelet* com uma base gaussiana de primeira ordem. Sempre que o módulo da magnitude de cada escala é zero (*zero-crossing*), significa que tem-se um ponto de máximo, mínimo ou singularidade. A estratégia a ser adotada é que basta apenas o módulo da magnitude da transformada chegar a um valor próximo a zero (abaixo de um valor de *threshold*) em apenas uma das escalas que será habilitado o sinal de amostragem.

A Figura 12 mostra a análise de um sinal por uma *wavelet* gaussiana de primeira ordem ao longo de 64 escalas. Verifique que existe um ponto de máximo dentro das primeiras 400 amostras, onde nota-se que o módulo da magnitude da Transformada tem um *zero-crossing* em um período de tempo bem definido. Entretanto, após a amostra 400, o módulo da magnitude fica um longo período em zero, pois o próprio sinal parece ser constante neste trecho. Assim, tanto para a primeira, quanto para a segunda detecção, o valor a ser capturado deve ser a amplitude média durante o intervalo sinalizado.

Para determinar se o valor amostrado é um máximo ou mínimo, é necessário comparar o mesmo com uma amostragem anterior. Por exemplo, se a amplitude amostrada anteriormente for maior que a atual, então a amostra atual indica um mínimo local. Caso contrário é um máximo.

Ao mesmo tempo em que a amplitude média do sinal é obtida, deve-se realizar um calculo do expoente de Lipschitz médio no mesmo intervalo de tempo que o sinalizado pelo

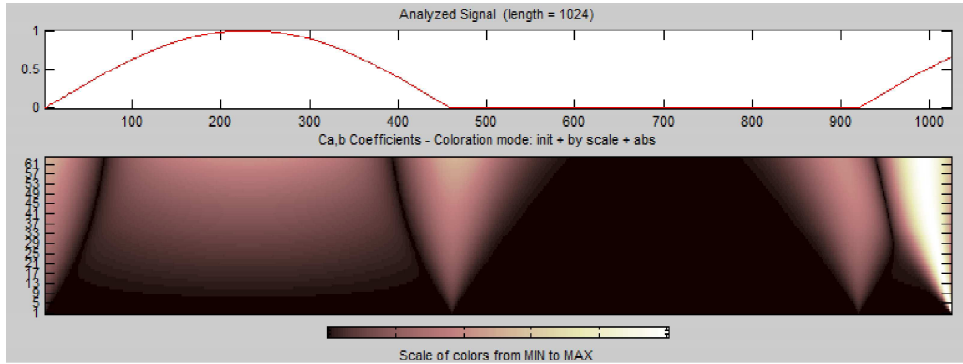


Figura 12 – Por meio da Transformada *Wavelet* com uma gaussiana de primeira ordem, pode-se localizar onde o sinal deverá ser amostrado. A amplitude obtida deve ser à média da amplitude dentro do intervalo de tempo sinalizado pelo *zero-crossing*.

zero-crossing. A Figura 13 mostra o comportamento do expoente de Lipschitz para o sinal com metade do ciclo de uma senóide. Verifique que no cálculo do Lipschitz para o trecho da função aparentemente constante, o valor cai para um Lipschitz igual a 2 exatamente no meio deste trecho. Isto porque, apesar de não ser visível, neste trecho, a função tem uma amplitude de 0.0005, conforme mostra a Fig. 14.

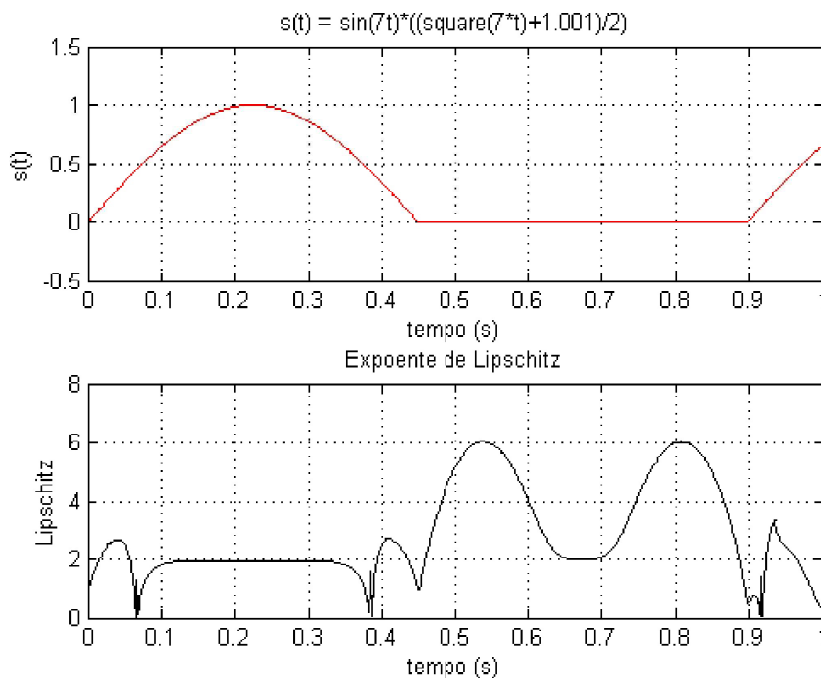


Figura 13 – Por meio da Transformada *Wavelet* com uma gaussiana de primeira ordem, pode-se localizar onde o sinal deverá ser amostrado. A amplitude obtida deve ser à média da amplitude dentro do intervalo de tempo sinalizado pelo *zero-crossing*.

Por fim, a localização do tempo dos mínimos, máximos e singularidades e dos pontos de inflexão podem ser obtidos sob a forma de pulsos binários que determinam quando

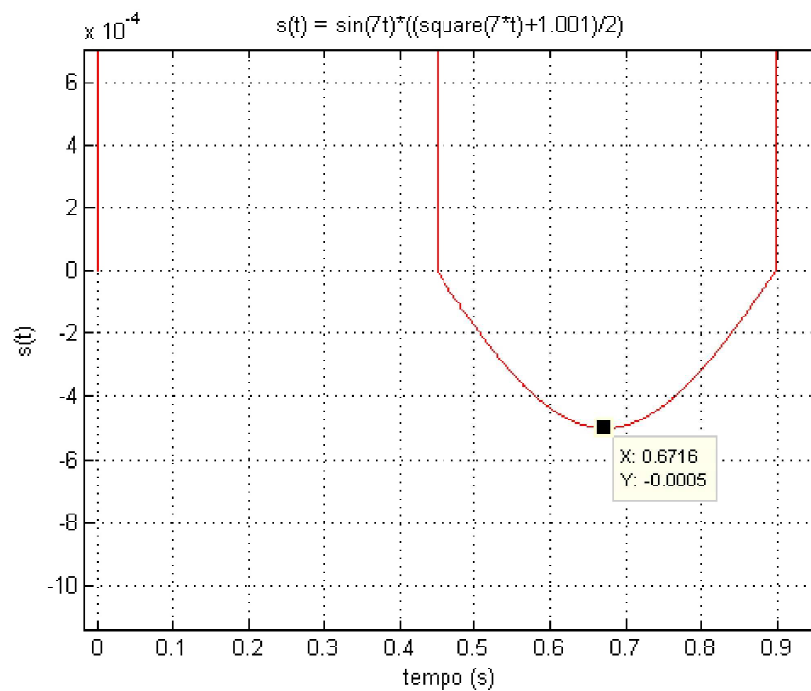


Figura 14 – Detalhamento do sinal $s(t)$. Verifique que o mesmo não é constante como aparentemente é mostrado nas Figuras 12 e 13.

ocorreu um *zero-crossing* para as magnitudes da Transformada *Wavelet* com as gaussianas de primeira e segunda ordem. Entretanto, quando ocorrer de um ponto de inflexão acontecer ao mesmo tempo em que a detecção de um mínimo, máximo ou singularidade ocorre, o resultado deve ser um nulo para a inflexão, pois esta não pode ser classificada como mínimo ou máximo local. Os parâmetros obtidos desta forma permitem localizar a função no tempo e em amplitude. A Figura 15 mostra uma primeira versão do diagrama de blocos para o conversor proposto, além de resumir o processo de conversão descrito.

Posteriormente, será discutida uma metodologia para recuperar o sinal. Apesar da recuperação fazer parte de um projeto de conversor D/A, esta discussão servirá para reforçar que a informação capturada pode ser trazida ao modelo de amplitude no tempo para estudos de pontos que não foram amostrados pelo conversor.

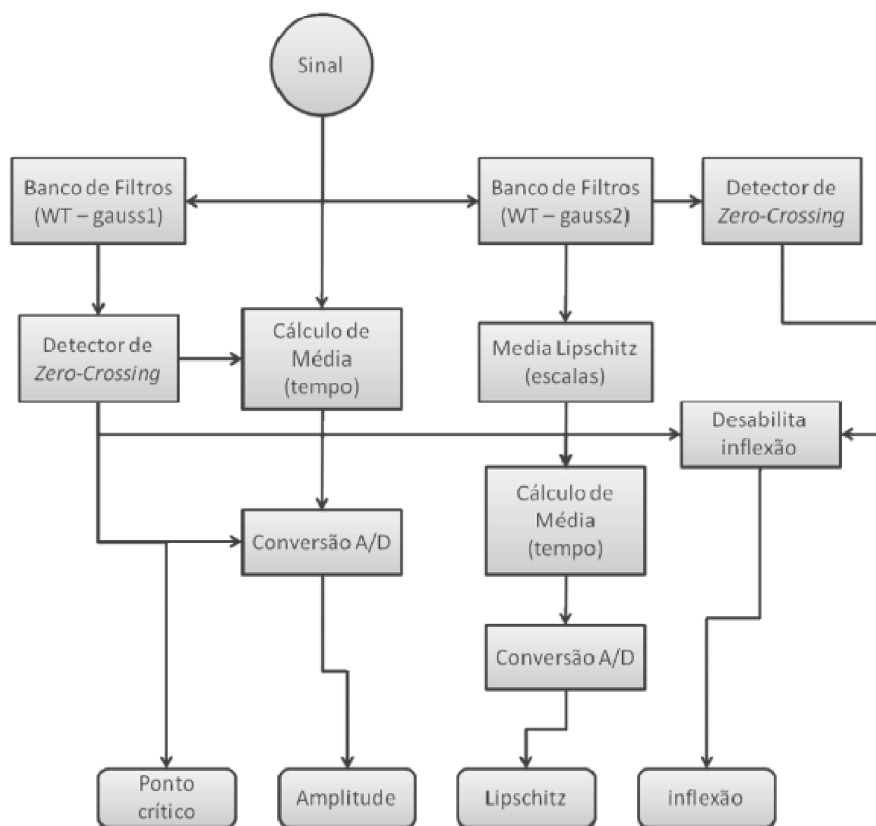


Figura 15 – Diagrama de blocos do conversor A/D proposto. As informações de saída são o ponto crítico (posição de mínimo, máximo ou singularidade), amplitude (no ponto crítico), expoente de Lipschitz (no ponto crítico) e inflexão (posição).

8 Modelagem do Sistema em Simulink

O Diagrama de blocos mostrado na Figura 15 foi reestruturado de forma a reduzir a complexidade do sistema e permitir uma maior robustez ao detectar um evento de singularidade, mínimo ou máximo. Isto se fez necessário, pois o sistema proposto apresenta uma sensibilidade valores de *threshold*, ou seja, há possibilidade de algumas singularidades não serem detectadas devido a insensibilidade do sistema a sinais muito pequenos.

Para aumentar a capacidade do sistema de detectar eventos de singularidades, verificou-se que se pode detectar um evento de *zero-crossing* verificando quando uma escala de *wavelet* gaussiana de primeira ordem cruze o valor 0. Isso pode ser feito com um simples comparador. Sempre que ocorrer um *zero-crossing*, haverá uma transição de nível baixo para alto ou de alto para nível baixo. Assim, utilizando um detector de borda de transição, pode-se sinalizar a um sistema do tipo *sample and hold* para obter somente uma amostra do sinal, não sendo mais necessário realizar um cálculo de amplitude média tal como a metodologia apresentada anteriormente.

Com base nessa proposta e utilizando a ferramenta de simulação dinâmica de sistemas *Simulink* para Matlab, implementou-se um sistema que descreve o comportamento do processo de amostragem proposto neste trabalho. O diagrama de blocos do sistema pode ser visto na Figura 16. Este sistema foi construído para utilizar 5 escalas de *wavelet* gaussianas de segunda ordem e uma de primeira ordem. Assim, ele possui um total de 7 entradas e 4 saídas.

O bloco *comparador1* utiliza a *wavelet* gaussiana de primeira ordem para gerar o sinal de amostragem. Tal como a derivada do próprio sinal de entrada, sempre que a amplitude da *wavelet* tem valor igual a zero, a inclinação do sinal de entrada tem o valor de tangente igual a zero, estando ele em um máximo um mínimo ou mesmo um ponto singular. Assim, sempre que a saída do *comparador1* transitar do máximo para o mínimo ou de mínimo para o máximo, é detectado um evento para sinalizar uma amostragem.

Para o bloco *comparador2*, é utilizada a maior escala das *wavelets* gaussianas de segunda ordem para identificar os pontos de inflexão do sinal, pois tal como uma derivada segunda do sinal de entrada, sempre que ela cruza o valor de amplitude igual a zero um evento de inflexão é detectado.

Na Figura 16 os dois blocos principais são intitulados de *Sampler* e *Samp_Lipsc*. O primeiro destes realiza a amostragem da amplitude do sinal somente quando um evento de singularidade, mínimo ou máximo é detectado. O bloco de amostragem da amplitude consiste em um bloco do tipo *Sample and Hold* controlado por um detector de borda de subida/decida, conforme mostrado na Figura 17.

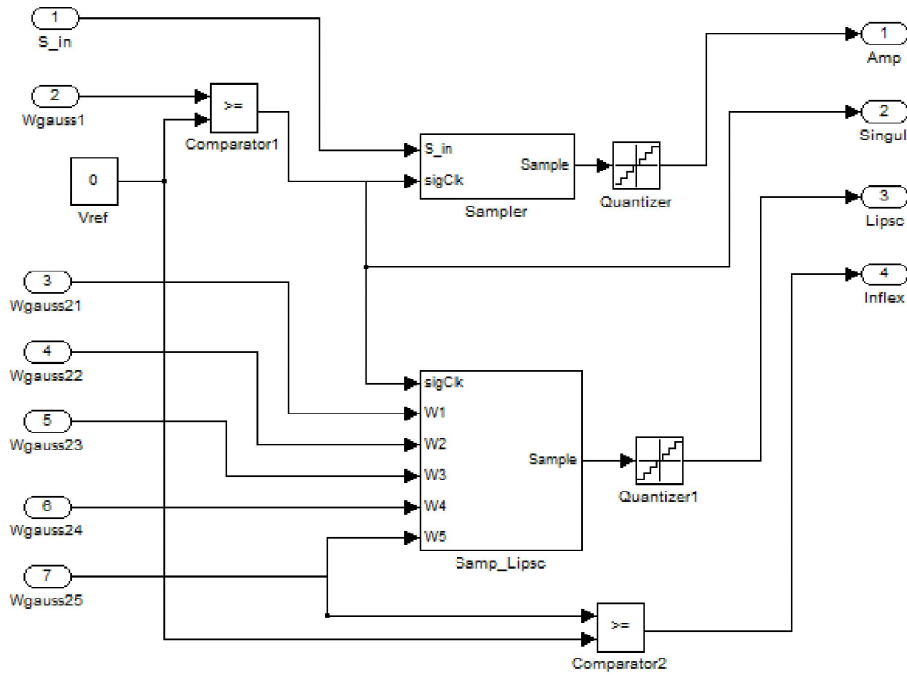


Figura 16 – Diagrama de blocos do sistema de amostragem proposto neste trabalho.

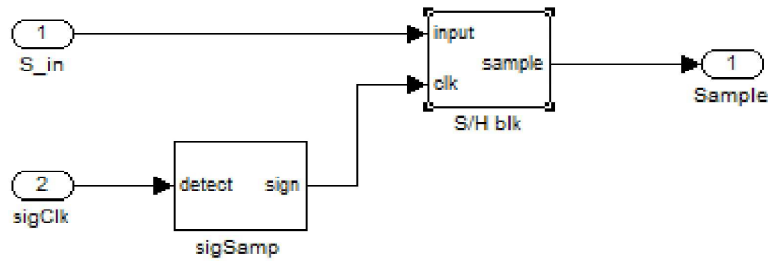


Figura 17 – Diagrama de blocos do sistema de amostragem da amplitude.

O bloco *Samp_Lipsc* utiliza as amplitudes ao longo das escalas das wavelets gaussianas de segunda ordem para calcular o expoente de Lipschitz e amostrá-lo também somente quando um evento de singularidade, máximo ou mínimo for detectado. Este bloco consiste em um sistema para o cálculo do expoente de Lipschitz e um bloco Sample and Hold conforme a Figura 18.

O bloco de cálculo do expoente de Lipschitz (*Calc_Lipsc*) realiza a média da diferença entre o logaritmo das amplitudes ao longo das escalas conforme o diagrama mostrado na Figura 19. O bloco de cálculo dessas diferenças chamado de Lipschitz é mostrado na Figura 20 e implementa o cálculo da Eq. 8.1.

$$\alpha = \frac{\log_2|WT(t, a_i)| - \log_2|WT(t, a_{i-1})|}{\log_2 a_i - \log_2 a_{i-1}} - \frac{1}{2} \quad (8.1)$$

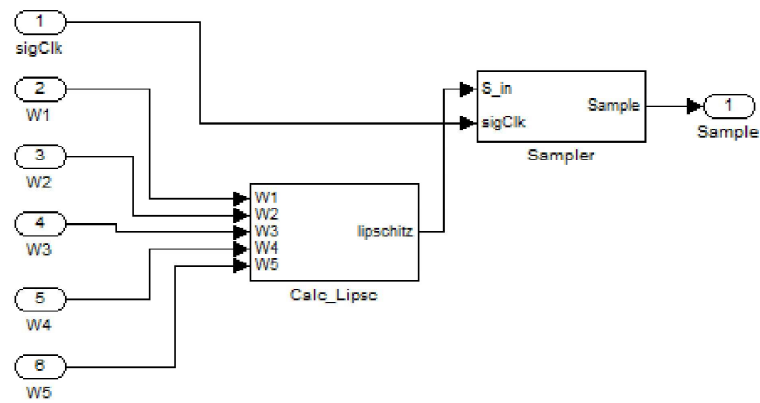


Figura 18 – Diagrama de blocos do sistema de amostragem do expoente de Lipschitz.

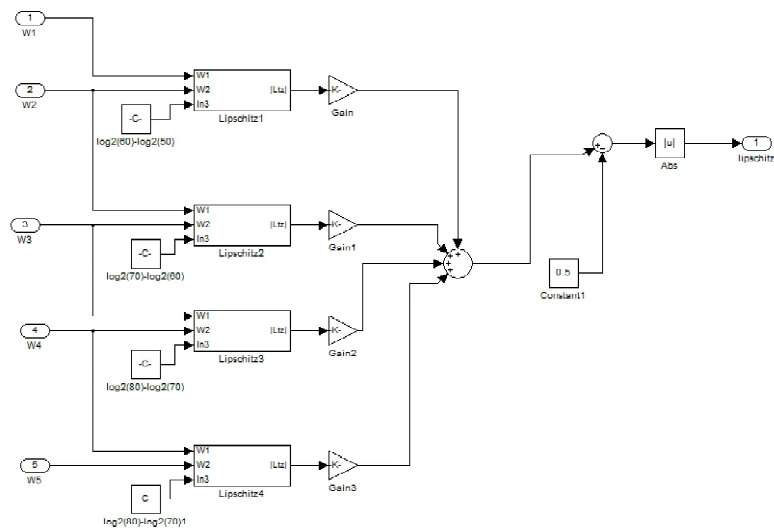


Figura 19 – Diagrama de blocos do para o calculo do expoente de Lipschitz. Verifique que cada sub bloco chamado de Lipschitz recebe duas escalas de wavelet e uma constante para implementar a Equação 8.1.

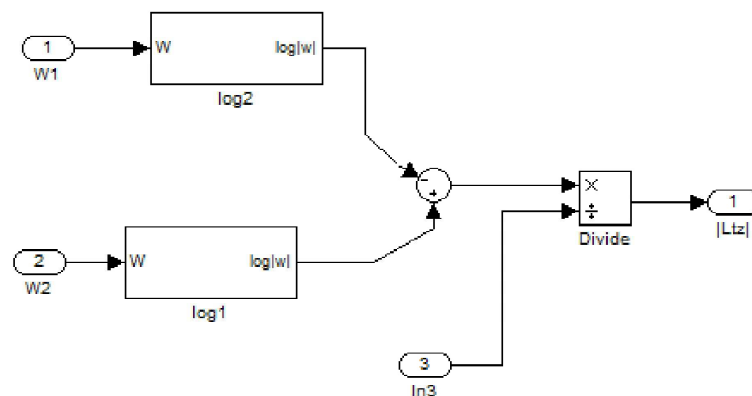


Figura 20 – Diagrama de blocos para o calculo da diferença dos logaritmos das amplitudes das wavelets gaussianas de segunda ordem.

9 Sistema a nível de circuito

Procurou-se implementar o sistema proposto a nível de circuito baseado em transistor MOS (*Metal Oxide Semiconductor*). Para realizar as operações matemáticas apresentadas neste trabalho, alguns circuitos foram projetados em inversão fraca, em que a relação entre corrente de saída é exponencial com a tensão de entrada (ALLEN; HOLBERG, 2002), tal como a Equação 9.1. Observando-se a Equação 8.1, pode-se verificar que é necessário implementar operações de módulo, divisão e logaritmo para o cálculo do expoente de Lipschitz. Rearranjando a Equação 8.1, pode-se obter a Eq. 9.2.

$$I_s \propto e^{V_{gs}} \quad (9.1)$$

$$\alpha + \frac{1}{2} = \frac{\log_2 \left(\frac{|WT(t, a_i)|}{|WT(t, a_{i-1})|} \right)}{\log_2 \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right)} \quad (9.2)$$

9.1 Circuito Logaritmo

Para obter um circuito logaritmo, usou-se a relação apresentada na Eq. 9.1 de forma que a tensão V_{gs} dependa de I_s de forma logaritma (Eq. 9.3 onde k é uma constante de proporcionalidade). A Figura 21 mostra o circuito projetado. No primeiro estágio, a tensão medida em V_{gs} é o logaritmo da corrente que passa pelo transistor. No segundo estágio, os dois transistores estão em inversão forte e elevam a tensão V_{gs} para um patamar que polarize a entrada do terceiro estágio. O último estágio converte a tensão do segundo estágio em corrente de saída.

$$V_{gs} = \ln(kI_s) \quad (9.3)$$

9.2 Circuito Multiplicador e Divisor

A Figura 22 representa o princípio de um multiplicador em modo corrente. Somando-se as tensões de V_{gs1} a V_{gs4} obtém-se uma relação de produtos de correntes, onde a Eq. 9.5 implementa um produto e uma divisão. Se I_2 for constante, a medida em I_4 será

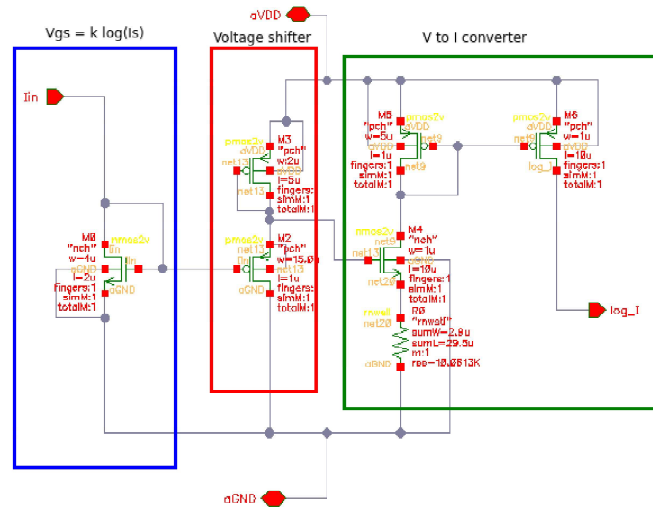


Figura 21 – Circuito de função logaritma.

proporcional a razão entre I_1 e I_3 . Caso I_3 seja constante, I_4 será o produto entre I_1 e I_2 .

$$\begin{aligned} V_{gs1} + V_{gs2} &= V_{gs3} + V_{gs4} \\ \ln(I_1) + \ln(I_2) &= \ln(I_3) + \ln(I_4) \\ I_1 I_2 &= I_3 I_4 \end{aligned} \quad (9.4)$$

$$I_4 = \frac{I_1 I_2}{I_3} \quad (9.5)$$

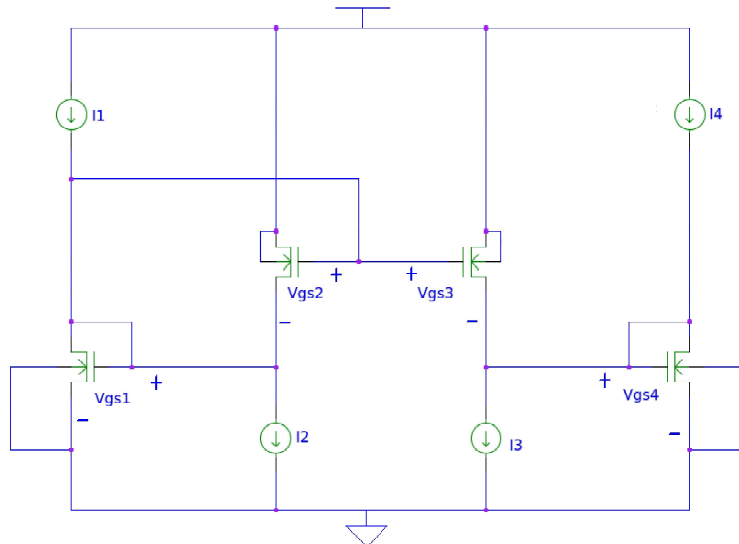


Figura 22 – Princípio de multiplicador/divisor em modo corrente.

As correntes a serem empregadas neste trabalho serão todas positivas pois a alimentação do circuito se dará do terra (GND) à tensão de alimentação (VDD). Assim, para implementar o circuito multiplicador, teve-se de se adicionar uma corrente de *offset* de forma que uma corrente senoidal qualquer não tivesse sua excursão prejudicada.

A Equação 9.6 mostra o resultado da multiplicação com a adição do *offset*. Verificasse que é necessário eliminar alguns termos do produto para compensar a saída e tornar o produto simétrico com relação ao *offset* d . A Figura 23 mostra o circuito multiplicador implementado neste trabalho. Nela, os dispositivos destacados nos retângulos realizam a compensação de *offset* (elimina o termo d) e simetria (elimina o termo $(A + B)d$) do produto. Para o circuito de divisão, deve-se limitar que as correntes de entrada também sejam sempre positivas. Neste caso, não houve necessidade de se compensar a saída. A Figura 24 mostra o circuito implementado para a operação de divisão.

$$(A + d)(B + d) = AB + (A + B)d + d^2 \quad (9.6)$$

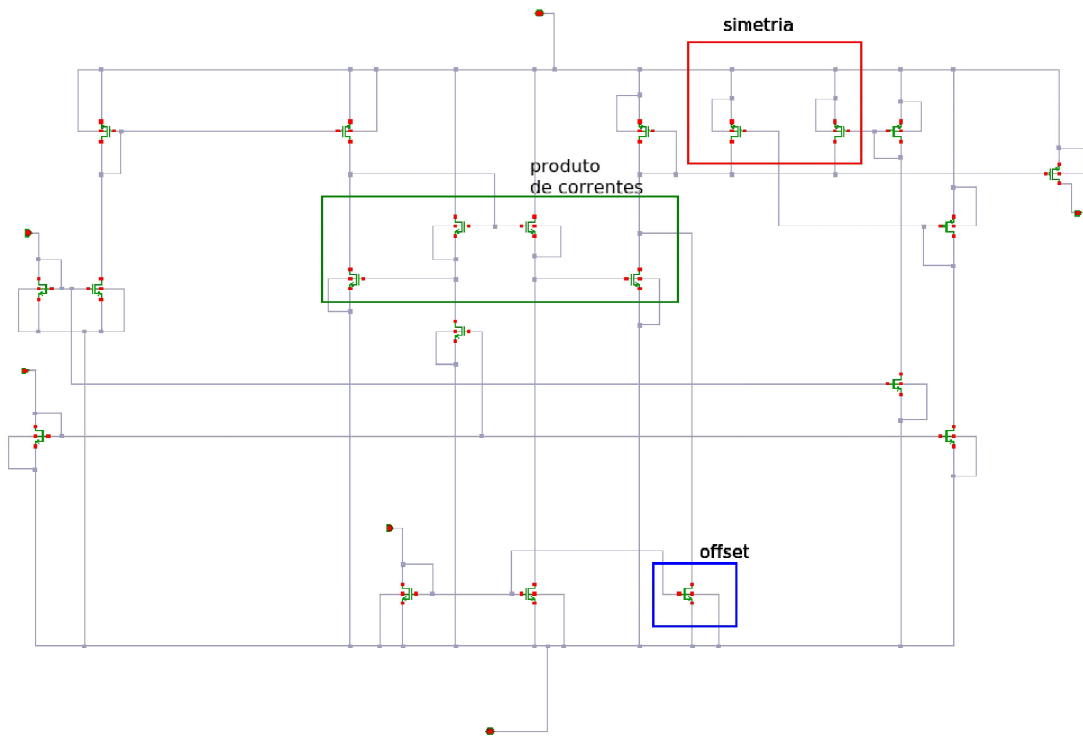


Figura 23 – Circuito multiplicador.

9.3 Circuito para Cálculo do Expoente de Lipschitz

Utilizando os circuitos implementados foi possível obter um modelo que permite correlacionar o expoente de Lipschitz com duas correntes de entrada provenientes da transformada Wavelet. Substituiu-se a operação de módulo por potencia de 2. Para isso, a mesma corrente foi colocada nas duas entradas do bloco multiplicador. Como resultado, $\ln(W^2) = 2\ln(W)$. O circuito mostrado na Figura 26 mostra o circuito de cálculo do

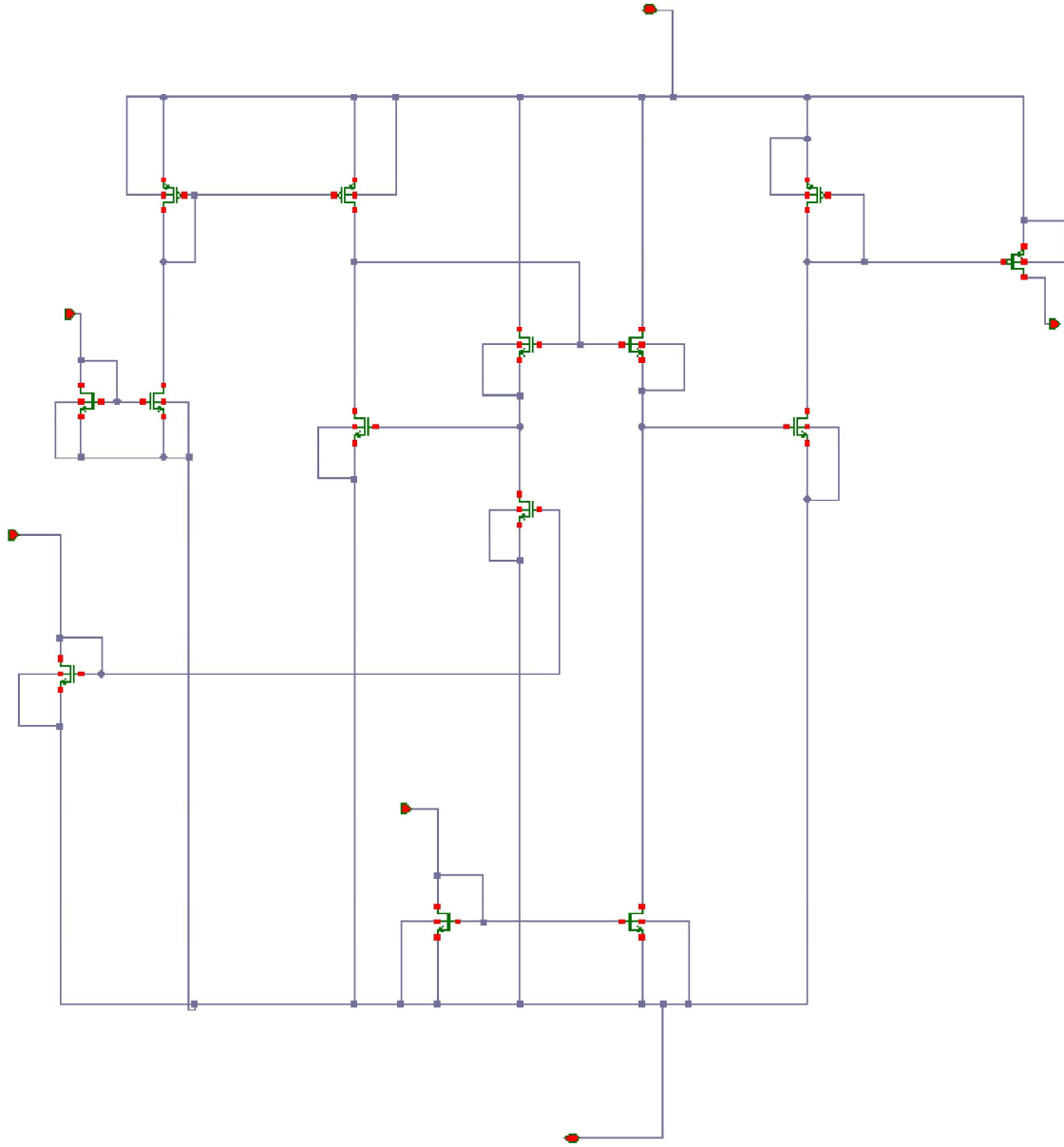


Figura 24 – Circuito divisor.

expoente de Lipschitz implementando a Eq. 9.7. Note que o uso do argumento quadrático no logaritmo nos fornece o dobro da parte logaritma da Eq. 9.2.

$$\alpha + \frac{1}{2} \propto 2 \frac{\ln \left(\frac{WT(t, a_i)}{WT(t, a_{i-1})} \right)}{\ln \left(\frac{a_i}{a_{i-1}} \right)} \quad (9.7)$$

9.4 Circuito de Detecção de Borda e Amostragem

O sinal de amostragem do sistema proposto provem de uma escala da Transformada *Wavelet* de primeira ordem. Este sinal será processado por um comparador onde a cada transição de 0 para *VDD* ou *VDD* para 0, será detectado um mínimo ou máximo.

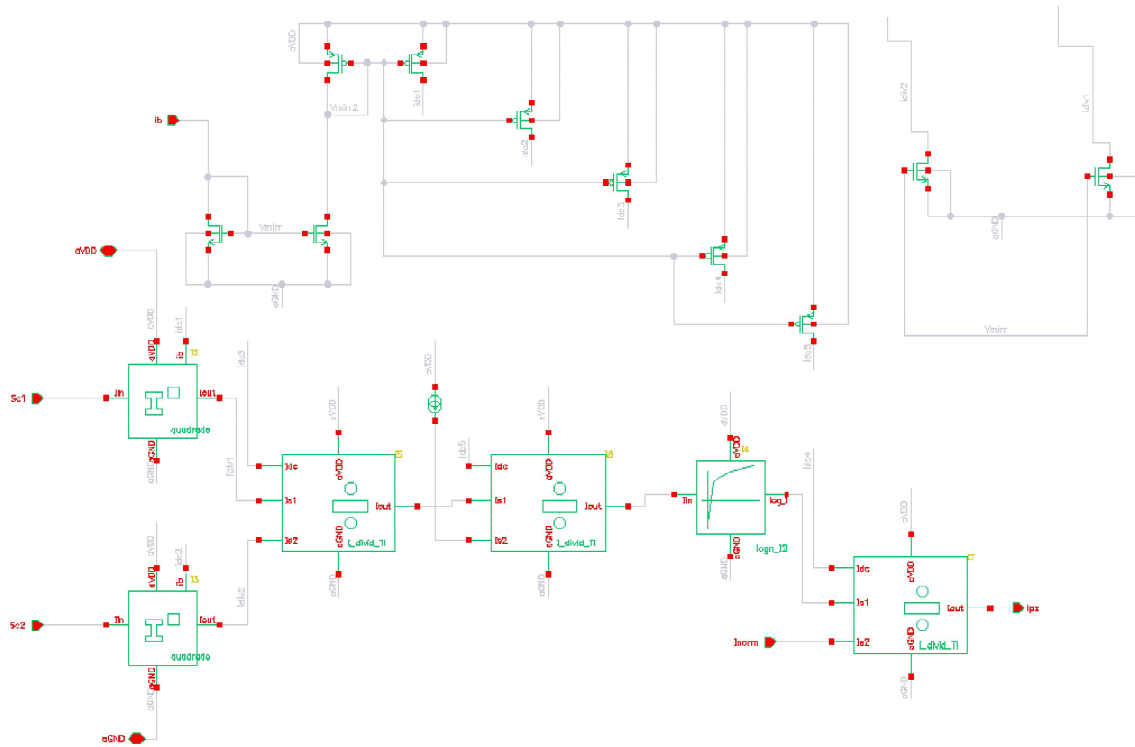


Figura 25 – Circuito para o calculo do Lipschitz.

Para tornar isso um sinal de amostragem utilizou-se o circuito presente na Figura ?? que, com base em um atraso do sinal em uma de suas entradas, é possível verificar quando houve uma transição de subida ou decida. Este sinal é passado para um circuito de *Sample and Hold* (Fig. 27) de forma a manter o sinal para que possa ser quantizado em seguida.

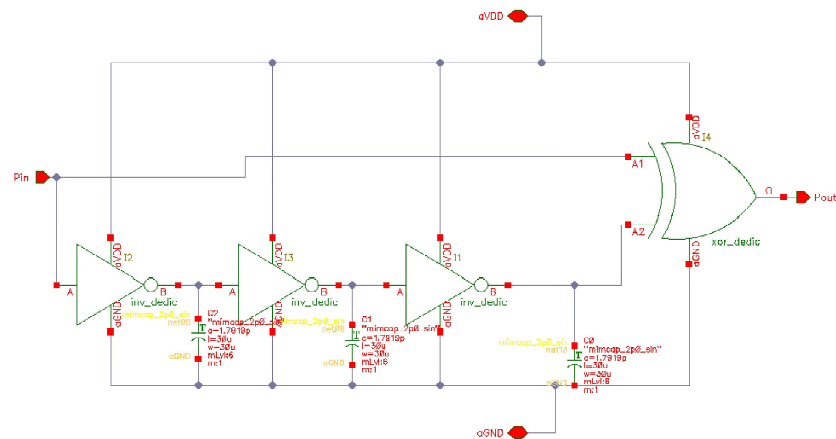


Figura 26 – Circuito detector de borda.

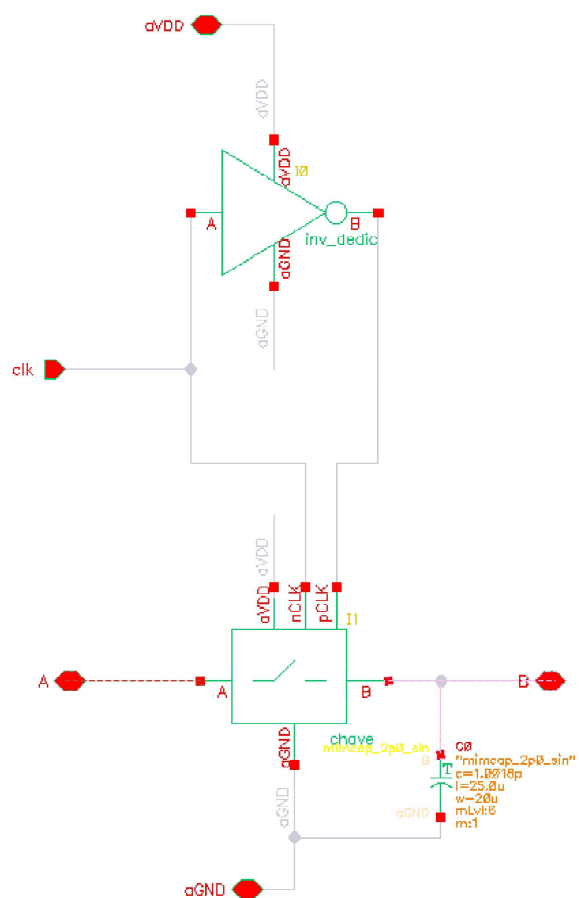


Figura 27 – Circuito *Sample and Hold*.

10 Reconstrução do Sinal

Sob a perspectiva de reconstruir o sinal obtido através do conversor proposto, sugere-se um método de aproximação polinomial, no qual, dadas algumas condições da função, pode-se construir uma curva suave que permita inferir o comportamento de uma função dentro de um intervalo. No caso do conversor proposto para este trabalho, as informações obtidas permitem aproximar o comportamento da função entre dois pontos amostrados.

Por meio de uma adaptação de um algoritmo de interpolação da *spline* cúbica presente em (ANTON; RORRES, 2001), tomou-se algumas condições iniciais garantir que nas extremidades da interpolação, a função apresente as mesmas características que a original. Por apresentar bons resultados, escolheu-se utilizar um polinômio de 5ª ordem. Assim, dado um intervalo $[a, b]$ em que se deseja passar uma curva suave, onde a e b são os pontos onde se obtiveram amplitudes e o expoente de Lipschitz, tem-se as condições a seguir para uma curva suave $f(t)$:

- Tomando-se um ponto P_1 e P_2 como dois pontos amostrados do sinal $s(t)$, deve-se obter um valor $A_1 = P_1 - cm$ e $A_2 = P_2 - cm$ onde cm é uma amplitude estimada par o ponto de inflexão entre P_1 e P_2 .
- $f(a) = A_1$ e $f(b) = A_2$ onde A_1 e A_2 são as amplitudes amostradas em a e b respectivamente;
- $\frac{df(t)}{dt} \big|_{a+\delta_1} = \frac{ds(t)}{dt} \big|_{a+\delta_1}$ e $\frac{df(t)}{dt} \big|_{b+\delta_2} = \frac{ds(t)}{dt} \big|_{b+\delta_2}$ onde $s(t)$ é o sinal a ser aproximado e δ_1 e δ_2 são valores diminutos.
- $f(c) = V_1$ e $f(d) = V_2$ onde são pontos estimados para $s(c)$ e $s(d)$;

A primeira condição localiza a curva $f(t)$ em amplitude com relação à $s(t)$. A segunda condição procura garantir um comportamento regular ou singular que o sinal $s(t)$ apresenta nas proximidades de a e b . Verifique esta condição não é tomada nos próprios valores de a e b pois $s(t)$ pode não ser regular nestes pontos. Por fim, a terceira condição estabelece que a função deve passar por pontos esperados onde $s(t)$ deve estar.

Como $s(t)$ não será totalmente amostrado, o próprio expoente de Lipschitz pode ser usado para inferir o comportamento do sinal nas proximidades do ponto amostrado. Usando como base de aproximação o polinômio proposto com exemplo por (HADDAD; SERDIJN,

2009) na da Eq. 5.3, foram feitas adaptações para um caso que considera amplitude, deslocamento no tempo e intervalo, conforme mostrado na Eq. 10.1.

$$s(t) \approx S(t) = \frac{A}{\nu^\alpha} (\nu^\alpha - |\tau - t|^\alpha) \quad (10.1)$$

onde ν é o suporte da função em torno do deslocamento temporal τ , A é a amplitude do sinal e α é o expoente de Lipschitz. A Figura 28 mostra o comportamento desta função quando o $\tau = 0.5$, $\nu = 0.25$ e $A = 3$ com $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$.

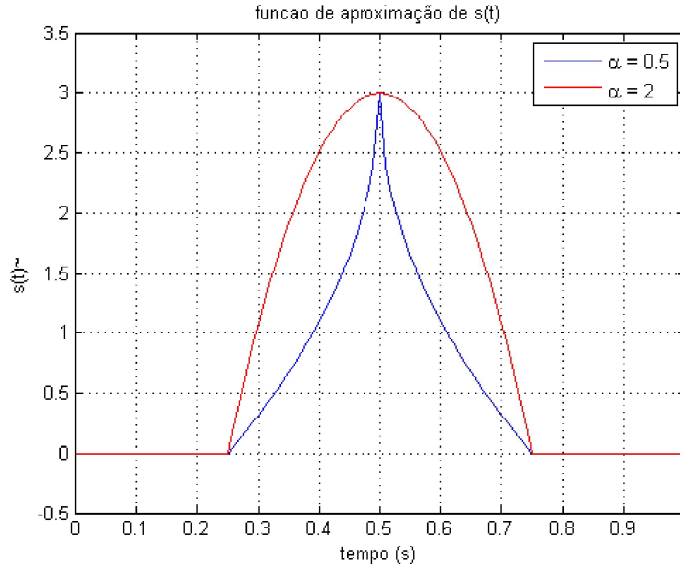


Figura 28 – Comportamento da função de aproximação de $s(t)$ baseada em polinômio.

O valor de cm pode ser estimado igualando-se as derivadas das funções de aproximação $t = \tau_1 + \nu_1$ (ponto de inflexão entre τ_1 e τ_2) que correspondem ao aproximador do ponto amostrado $P1$. O valor de cm para o aproximador apresentado na Eq. 10.1 é mostrado na Eq. 10.2.

$$cm = \frac{\frac{\alpha_1 |\tau_1 - t|^{\alpha_1 - 1}}{\nu_1^{\alpha_1}} P_1 + \frac{\alpha_2 |\tau_2 - t|^{\alpha_2 - 1}}{\nu_2^{\alpha_2}} P_2}{\frac{\alpha_1 |\tau_1 - t|^{\alpha_1 - 1}}{\nu_1^{\alpha_1}} + \frac{\alpha_2 |\tau_2 - t|^{\alpha_2 - 1}}{\nu_2^{\alpha_2}}} \quad (10.2)$$

onde ν é o suporte da função em torno do deslocamento temporal τ , A é a amplitude do sinal e α é o expoente de Lipschitz. A Figura 28 mostra o comportamento desta função quando o $\tau = 0.5$, $\nu = 0.25$ e $A = 3$ com $\alpha = 0.5$ e $\alpha = 2$.

Como estratégia de aproximação, o valor de ν a ser escolhido corresponde a distancia de tempo entre o ponto amostrado e o ponto de inflexão localizado entre a e b . Para ilustrar um exemplo de aproximação de sinal através de um polinômio, suponha que deseja-se aproximar uma curva por meio de duas amostras. A primeira amostra possui uma amplitude negativa de -2 com um Lipschitz de 2. A segunda amostra possui uma amplitude positiva de 1 e um Lipschitz de 0.6. Considerando que o pico da primeira amostra

está localizada em 0, a inflexão em 0.75π e o pico da segunda amostra está em π , pode-se realizar a aproximação apresentada na Fig. 29.

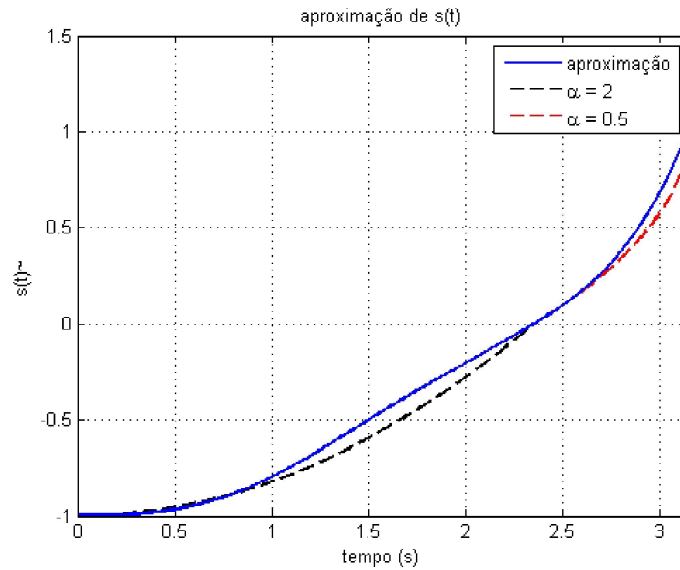


Figura 29 – Aproximação de um sinal amostrado $s(t)$. Sabendo-se o valor de sua amplitude em dois trechos desejados, da posição da inflexão e o do Lipschitz, pode-se realizar uma aproximação suave nos dois trechos.

10.1 Elaborando um aproximador Baseado em Função Seno

Após a amostragem do sinal, deve-se utilizar algum processamento para recuperar as informações presentes no sinal original. Uma possibilidade é utilizar o algoritmo descrito neste capítulo. Resumidamente, este algoritmo procura realizar uma primeira aproximação do sinal entre dois pontos amostrados com funções cujo comportamento é modulado pelo expoente de Lipschitz. Estas funções são baseadas no aproximador polinomial da Equação 10.1. Em seguida, um método de interpolação polinomial pode ser aplicado para suavizar o comportamento da aproximação do sinal neste trecho. A função apresentada na Eq. 10.1 é um exemplo de função que pode ser utilizada para realizar uma primeira aproximação do sinal original a partir dos parâmetros amostrados. Isso por que quando o valor do expoente Lipschitz é próximo de 2, esta função tende a aproximar funções com concavidades regulares tais como curvas senoidais ou gaussianas. Ou para o caso onde este expoente apresenta um valor menor que 1, sinais com singularidades acentuadas podem ser representados. Esta função apresenta as seguintes características:

- A função é simétrica em torno de $t = \tau$;
- Quando o valor do expoente de Lipschitz é maior ou igual a 2, a derivada desta função existe quando $t = \tau$;

- Quando o valor do expoente de Lipschitz é igual a 1, esta função apresenta inclinação aproximadamente constante sendo ela positiva para $t < \tau$ e negativa para $t > \tau$.

Com base nestas características é possível ajustar outras funções de forma a se obter um comportamento semelhante. Isso pode ser feito ajustando-se uma função de forma a arranjá-la tal como a Eq. 10.3. Neste formato, esta função pode ser ajustada a uma curva de acordo com os parâmetros amostrados.

$$S(t) = A(\alpha, \nu)(D(\alpha, \nu) - |\Phi(t, \tau, \alpha, \nu)|^\alpha) \quad (10.3)$$

Para a Equação 10.1, $A(\alpha, \nu) = A$, $D(\alpha, \nu) = \nu_\alpha$ e $\Phi(t, \tau, \alpha, \nu) = (t - \tau)$. Como exemplo de ajuste de funções no arranjo desta equação para aproximar o sinal, considere a função $|\sin(2\pi t)|$ mostrada na Figura 23. Pode-se obter uma função que segue as características da Equação 10.1 selecionando-se o a partir trecho cuja amplitude é igual a 0.5 e com simetria em $t = 0$, tal como o perfil selecionado pelo retângulo na Figura 30.

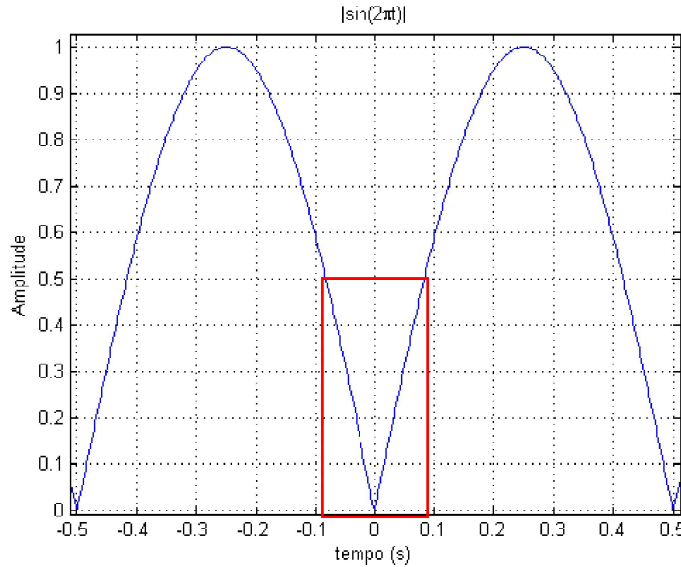


Figura 30 – Função $|\sin(2\pi t)|$ cujo trecho selecionado pode ser arranjado na Eq. 10.3.

Para ajustar $|\sin(2\pi t)|$ na Eq. 10.3, tomou-se $D(\alpha, \nu) = D = 0.5$ e $\Phi(t, \tau, \alpha, \nu) = \sin(\theta(\alpha, \nu)(t - \tau))$. O valor de $\theta(\alpha, \nu)$ deve ser obtido de forma que quando $t = \nu$, a Equação 10.3 seja igual a 0. Para isso, tomou-se $A(\alpha, \nu) = 1$, obtendo-se a Equação 10.4. Por fim, o valor de $A(\alpha, \nu)$ é tomado como a razão de A e $D(\alpha, \nu)$ onde A é constante. Isso porque para $A(\alpha, \nu) = 1$ o máximo valor do desse arranjo é $D(\alpha, \nu)$, fazendo-se necessário normalizar toda a equação por D . Assim, a amplitude da Eq. 10.3 possa ser controlado pela constante A . A forma final do arranjo de $|\sin(2\pi t)|$ na Equação 10.3 é dada pela Eq.

10.5. Considerando $\nu = 1$, $D = 0.5$, $\tau = 1$ e $A = 1$, o comportamento desta função com relação ao expoente de Lipschitz é mostrado na Figura 31.

$$\theta(\alpha, \nu) = \sin^{-1} \left(\frac{\sqrt[\alpha]{D}}{\nu} \right) \quad (10.4)$$

$$s(t) \approx S(t) = \frac{A}{D} \left(D - |\sin^{-1}(\theta(\alpha, \nu)(t - \tau))|^\alpha \right) \quad (10.5)$$

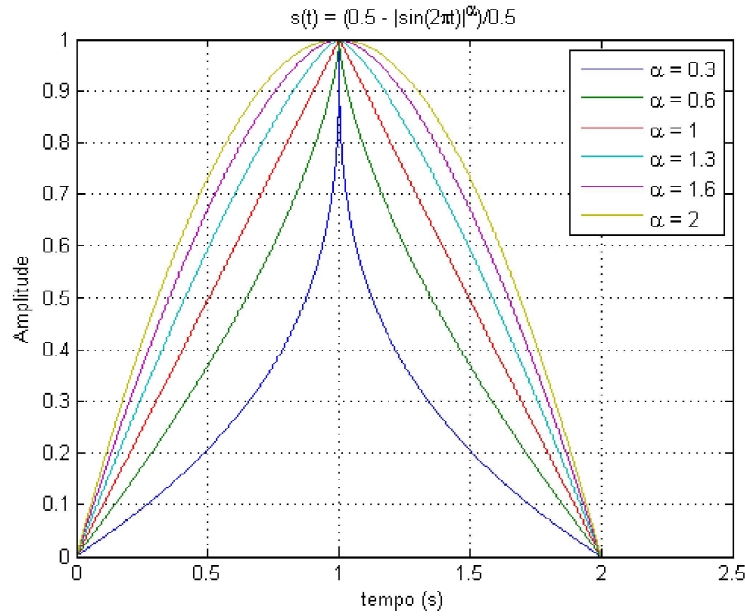


Figura 31 – Comportamento da Equação 10.5 em função do expoente de Lipschitz.

Procurando comparar o desempenho da função baseada em uma senoide e a baseada em um polinômio (Eq. 10.1) procurou-se aproximar ambas de um trecho da função cosseno. Para quantificar seu desempenho calculou-se a relação sinal ruído ou SNR no tempo a partir da Eq. 10.6. A Figura 32 mostra a comparação das duas funções com a função $\cos(2\pi t)$. Verifique que a aproximação senoidal sobrepôs o gráfico da função cosseno. Para o aproximador polinomial, a SNR foi de $34.5dB$ e para o aproximador senoidal, a SNR foi de $314.2dB$. De fato, esperava-se que uma função aproximadora obtivesse uma maior SNR ao aproximar uma função de características senoidais pelo fato deste aproximador ter sido originado de uma secção da função seno.

$$SNR = \frac{\int e(t)dt}{\int s(t)dt} \quad (10.6)$$

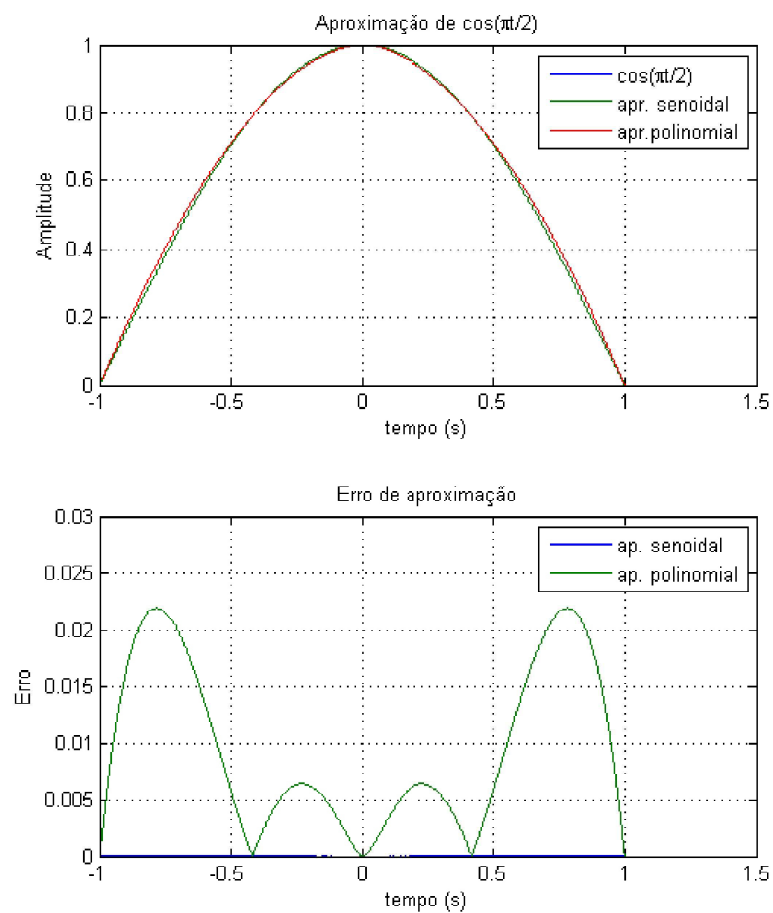


Figura 32 – Desempenho das duas funções de aproximação com relação a uma função cosseno.

Parte III

Resultados e Discussão

11 Resultados

Com base no conteúdo exposto e munido da *Wavelet toolbox* do *Software* de álgebra computacional Matlab R2008a[®], pode-se gerar alguns resultados parciais. O recurso utilizado foi a *Continuous Wavelet 1-D* que permitiu realizar a Transformada *Wavelet* e extrair suas componentes. Também foram utilizados recursos da ferramenta Simulink e a ferramenta *Cadence Virtuoso*.

11.1 Detecção de *Zero-Crossing*: Localizando Picos e Inflexões

A detecção dos zero-crossing é feita através de comparação de $|WT(t, a)|$ ao se aproximar de zero. Para realizar esta comparação, deve-se escolher um valor de *threshold* ρ tal que se $|WT(t, a)| < \rho$, um sinal de saída deve sinalizar um nível lógico alto. Caso contrário, deve ser sinalizado baixo. Como exemplo, considere o sinal representado pela Eq. 11.1 e apresentado na Fig. 33 onde na parte superior, tem-se o sinal e na parte inferior, tem-se a evolução das escalas resultantes da transformada com uma gaussiana de primeira ordem cujas escalas selecionadas foram a igual 16, 32, 48 e 64.

$$s(t) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-0.2}{0.1}\right)^2} + \frac{(0.75^{0.6} - |0.7 - t|^{0.6})}{0.75^{0.6}} \quad (11.1)$$

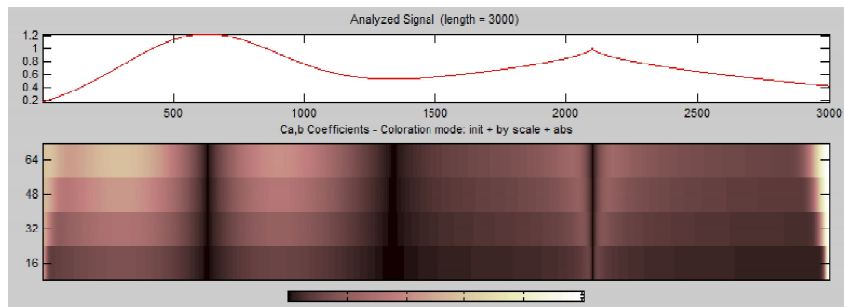


Figura 33 – Para o sinal analisado acima, 4 escalas foram selecionadas visando obter a posição das singularidades.

Para cada uma das escalas, foi verificado quando houve um *zero-crossing*. Assim, 4 sinais de detecção são obtidos. Como se deseja apenas um sinal de *zero-crossing*, a estratégia adotada foi a operação lógica *OU*, onde, bastando apenas um dos 4 sinais resultantes sinalizar um pico para que o sinal de saída seja o nível lógico verdadeiro. A Figura 34 mostra a detecção de pico obtida para o sinal em questão. Nela, é possível verificar o efeito de diferentes valores de *threshold*. Desta imagem, pode-se inferir que o valor de *threshold* ρ pode ser visto como uma sensibilidade a eventos de máximos ou mínimos. Neste caso, o melhor valor de ρ foi 0.01. Deve-se salientar que, apesar de que

para ρ igual a 0.001 parecer não haver a detecção de uma das singularidades, ela existe, mas devido a resolução de pontos usada no algoritmo de detecção, a transição foi rápida o suficiente para não ser captada.

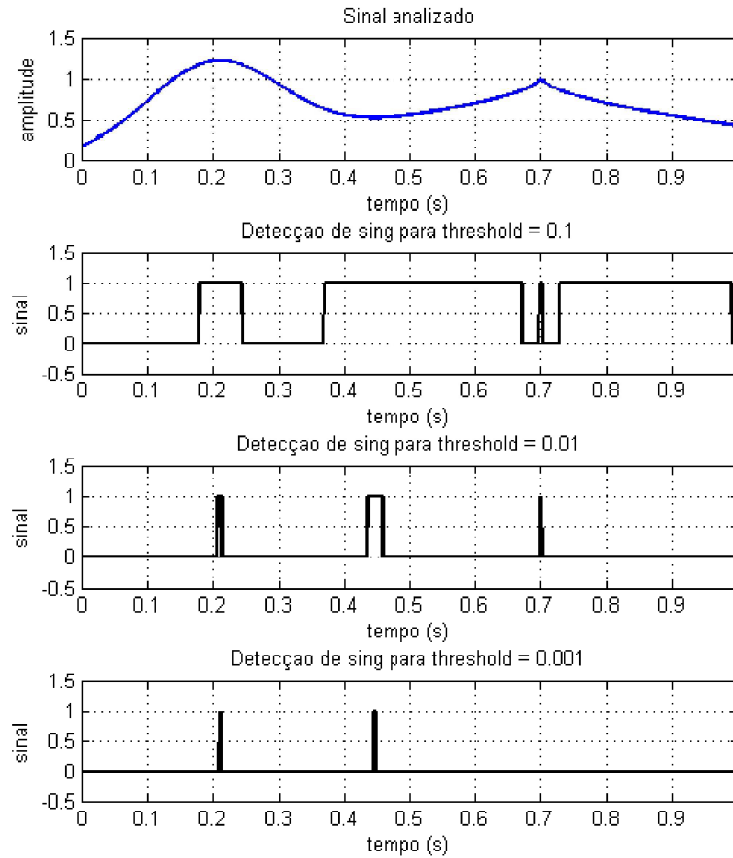


Figura 34 – Detecção de singularidades e regularidades de um sinal por meio do *zero-crossing*.

O mesmo algoritmo foi utilizado para detectar o *zero-crossing* com uma *wavelet* gaussiana de segunda ordem. O aspecto da evolução das escalas pode ser visto na Fig. 35. O resultado da detecção pode ser visto na Fig. 36, onde pode-se notar que o melhor valor para o threshold foi $\rho = 0.0005$. É necessário salientar que tanto para a detecção de singularidades e regularidades, quanto para a detecção de inflexões, o algoritmo pode realizar esta operação de maneira contínua, sem a necessidade de truncamento de uma janela de tempo para a análise.

11.2 Amostrando a Amplitude e o Expoente de Lipschitz

O sinal para localizar as singularidades e regularidades obtido anteriormente, com um *threshold* de 0.01, Foi usado como sinalização para iniciar a amostragem da amplitude

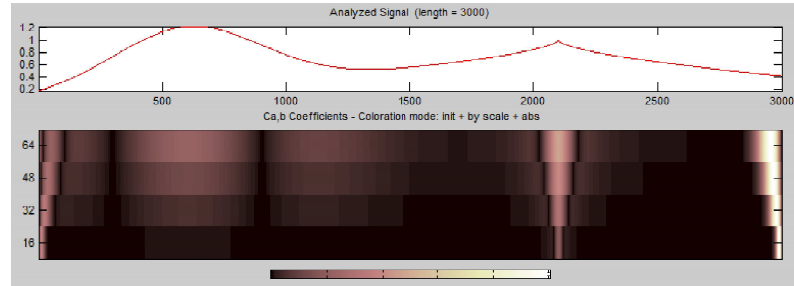


Figura 35 – Evolução da amplitude da transformada de um sinal ao longo das escalas para uma *wavelet* gaussiana de segunda ordem.

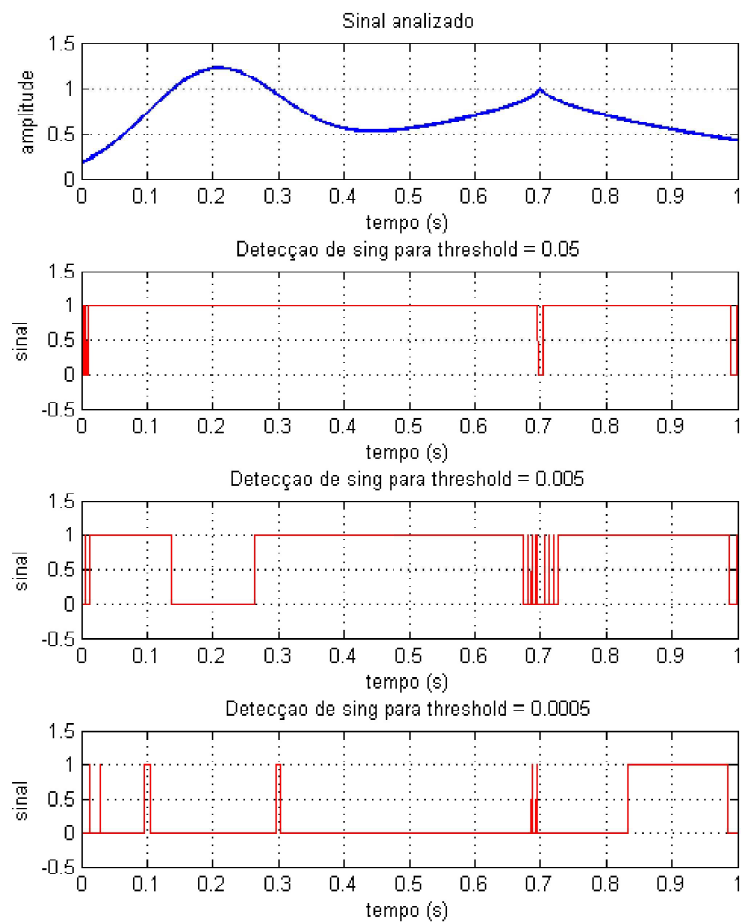


Figura 36 – Detecção de pontos de inflexão de um sinal por meio do *zero-crossing* da *wavelet* gaussiana de segunda ordem.

e do expoente de Lipschitz do sinal estudado. A estratégia seguida foi extrair o valor médio da amplitude e do Lipschitz enquanto o sinal de amostragem se mantivesse em nível lógico alto. Assim, que este sinal voltasse para nível lógico baixo, o valor a ser convertido para o meio digital seria justamente o valor médio neste período.

Ao acompanhar a evolução da amplitude da Transformada *Wavelet* ao longo das

escalas, pode-se verificar que o expoente de Lipschitz também varia como o tempo. Assim, ele deve ser extraído no ponto onde a função apresenta uma característica singular, de mínimo ou de máximo. Dessa forma, justifica-se amostrá-lo também quando o sinal de amostragem gerado pela presença de singularidade ou regularidade está em nível alto. A Figura 37 mostra a evolução do expoente de Lipschitz extraído das 4 escalas para a Transformada *Wavelet* com uma gaussiana de segunda ordem. A Figura 38 mostra o resultado do processo de amostragem do sinal.

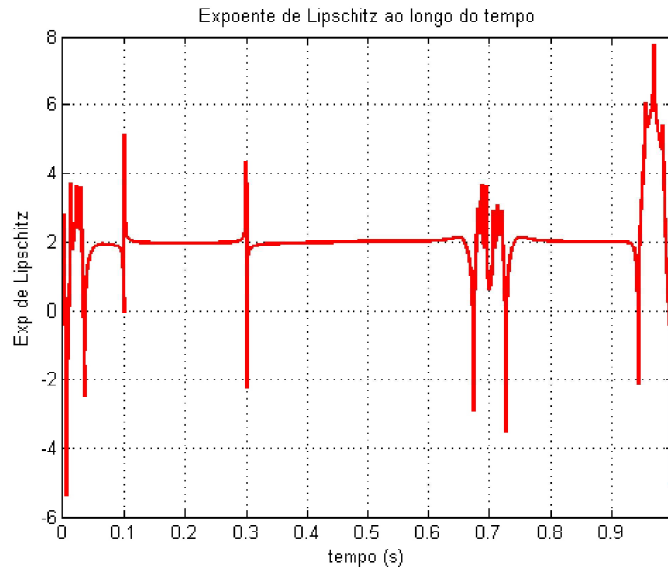


Figura 37 – Evolução do expoente de Lipschitz extraído do sinal analisado.

Verifique que pela Equação 11.1, o sinal estudado se trata de uma sobreposição com uma função gaussiana centrada em 0.2 e a função apresentada na Eq. 10.1 centrada em 0.7. Note que o expoente de Lipschitz obtido para $t = 0.7$ é aproximadamente 0.6, tal como o próprio expoente desta função na Eq. 10.1. De forma semelhante, podemos notar no gráfico do sinal que o efeito da sobreposição das duas funções gera a presença de 3 pontos de máximos, mínimos ou singularidades. Os dois primeiros apresentam comportamento regular, assim, o Expoente de Lipschitz permaneceu em torno de 2, diferente do terceiro ponto que é singular.

11.3 Exemplo de Amostragem de um Sinal de Eletrocardiograma

Como exemplo de aplicação do método proposto, gerou-se um sinal de Eletrocardiograma (ECG) sintético a partir do comando *ecg()* no ambiente Matlab. Foram geradas 5000 amostras e selecionou-se as escalas 80, 90, 100 e 110 da análise *wavelet* na ferramenta *Continuous Wavelet 1-D*. O resultado da análise é mostrado na Fig. 39, onde o sinal de ECG, com amplitude pico-a-pico de 1 é decomposto ao longo das escalas com *wavelets* gaussianas de primeira (imagem na parte central) e segunda ordem (imagem na parte

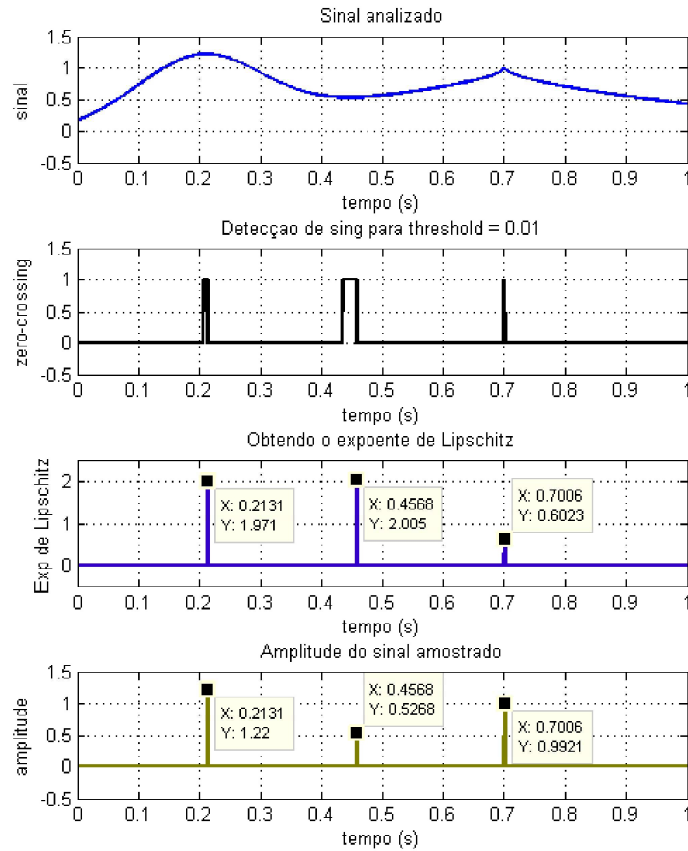


Figura 38 – Resultado da amostragem da amplitude e do Lipschitz do sinal utilizando a detecção de singularidade ou regularidade (mínimos, máximos, etc).

inferior). Note que para a análise feita pela gaussiana de primeira ordem, são esperados longos intervalos para amostragem, por exemplo, entre a amostra 4000 e a 5000. Já pela análise feita pela gaussiana de segunda ordem, são esperados pontos de inflexão dentro sobrepostos em longos períodos de amostragem. Assim, deve-se zerar a sinalização de inflexão nestes períodos.

Para esta aplicação valor de *threshold* de detecção de mínimos, máximos e singularidades foi igual a 0.02, e de 0.005 para detecção de inflexões. Assim, o resultado da amostragem é apresentado na Fig. 40. Chama-se a atenção na imagem correspondente ao expoente de Lipschitz amostrado o fato de este alcançar valores superiores à 2, que são maiores que o número de vanishing moments para uma gaussiana de segunda ordem. Apesar deste número limitar o valor do expoente de Lipschitz a ser obtido, sempre que um sinal tem um comportamento com pouca mudança de amplitude durante um longo período, valores superiores a 2 serão encontrados, pois quanto maior o grau do Lipschitz, mais achatado será o comportamento da função apresentada na Eq. 10.1.

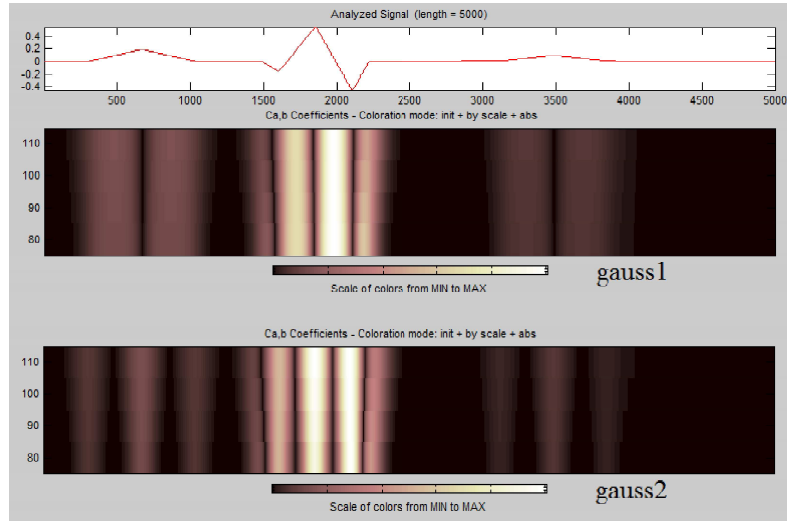


Figura 39 – Análise de um sinal ECG sintético por meio da Transformada *Wavelet* com as gaussianas de primeira (imagem na parte central) e segunda ordem (imagem na parte inferior).

11.4 Amostragem e Recuperação de Sinais

Procurando verificar e caracterizar o desempenho do sistema implementado em ambiente *Simulink* Matlab, realizou-se a amostragem de três sinais com singularidades ou regularidades e aplicou-se o algoritmo de recuperação a partir das amostras obtidas. As Figuras de 41 a 43 mostram cada uma das saídas do sistema de amostragem (em linha contínua) para os três sinais amostrados. Estes sinais são destacados como as curvas tracejadas em cada uma das imagens. Verifique que o gráfico correspondente ao expoente de Lipschitz permite identificar a força da singularidade em cada ponto amostrado. Procurou-se recuperar os sinais a partir das informações obtidas. Ressalta-se que a amplitude foi amostrada com um quantizador de 1024 níveis e o Lipschitz com um de 8.

Um sinal senoidal $0.5\sin(0,4\pi t)$ foi aplicado na entrada do sistema. Parte do sinal resultante da amostragem pode ser visto na Figura 41. Através do algoritmo de recuperação do sinal amostrado e utilizando as duas funções de aproximação descritas neste trabalho (polinomial e senoidal) pode-se obter o sinal restaurado e o erro de aproximação apresentado nas Fig. 44 e 45. Para este sinal é possível verificar que o desempenho da aproximação usando o aproximador senoidal foi melhor que o aproximador polinomial. É possível notar também que o erro de aproximação de ambos é maior nas primeiras amostras pois o algoritmo de recuperação supõe que em $t = 0$, a amplitude do sinal é zero.

O sinal descrito pela Equação 11.2 foi amostrado e recuperado utilizando os aproximadores polinomial e senoidal. O resultado da amostragem está presente na Figura 42. O sinal recuperado e o erro de aproximação podem ser vistos nas Figuras 46 e 47. Verifique que para a evolução do erro de aproximação, o aproximador polinomial apresentou

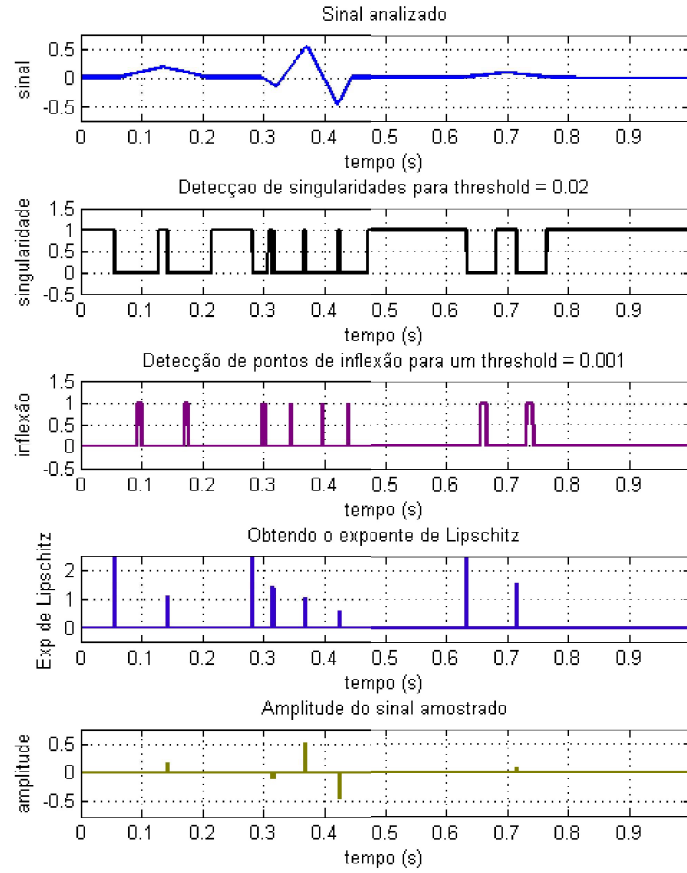


Figura 40 – Resultado da amostragem de um sinal seguindo o método proposto.

um desempenho melhor que o aproximador senoidal, diferente do que ocorreu com o sinal de apenas uma componente senoidal.

$$s(t) = \frac{\sin(0.2\pi t) + 0.3\cos(0.9\pi t)}{1.3} \quad (11.2)$$

Aplicou-se um sinal de entrada que apresenta uma singularidade cujo valor do expoente de Lipschitz é de 0.7 no ponto singular. Este sinal foi amostrado e recuperado utilizando os aproximadores polinomial e senoidal. A Figura 43 mostra o resultado do sinal amostrado e as Figuras 48 e 49 mostram o sinal recuperado com cada aproximador e o erro de aproximação respectivamente. Verifique que para a evolução do erro de aproximação, o aproximador polinomial apresentou um desempenho melhor que o aproximador senoidal, diferente do que ocorreu com o sinal de apenas uma componente senoidal.

Sinais com singularidades apresentam valores do expoente de Lipschitz menores em suas singularidades, pois se comportam como sinais de alta frequência. Isso significa que há uma correlação entre o valor do expoente de Lipschitz e a frequência do sinal, onde quanto maior a frequência de um sinal, menor é o valor do expoente para uma determinada faixa

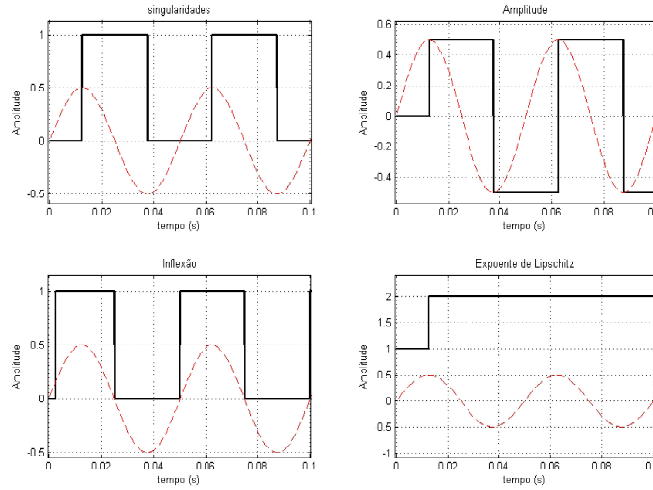


Figura 41 – Exemplo de sinal senoidal amostrado pelo sistema proposto obtido através de ambiente Simulink.

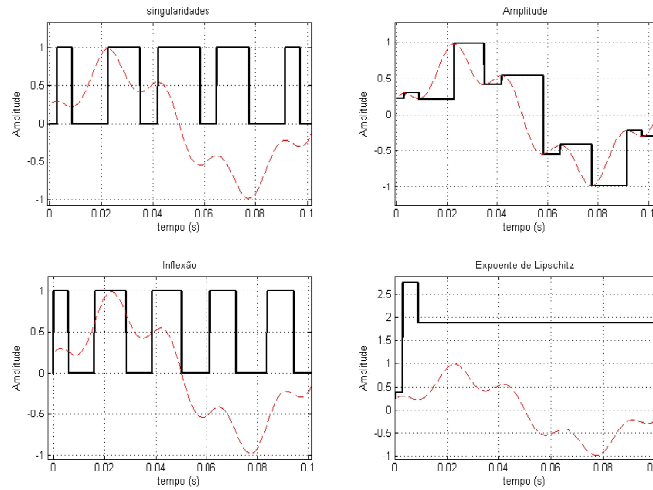


Figura 42 – Exemplo de sinal com duas componentes senoidais amostrado pelo sistema proposto.

de escalas da transformada *Wavelet*. A Figura 50 mostra o comportamento do expoente para um sinal com frequência que cresce quadraticamente com o tempo.

A partir do erro obtido ao aproximar cada sinal, pode-se quantificar o desempenho da recuperação do sinal de acordo com as informações amostradas. Utilizou-se para isso a relação de erro quadrático médio (Eq. 11.3) e a relação sinal ruído (Eq. 34). O resultado destas performances pode ser visto na Tabela ??.

$$EQM = \frac{\sum_{n=1}^N (S_{recup} - S_{orig})^2}{N} \quad (11.3)$$

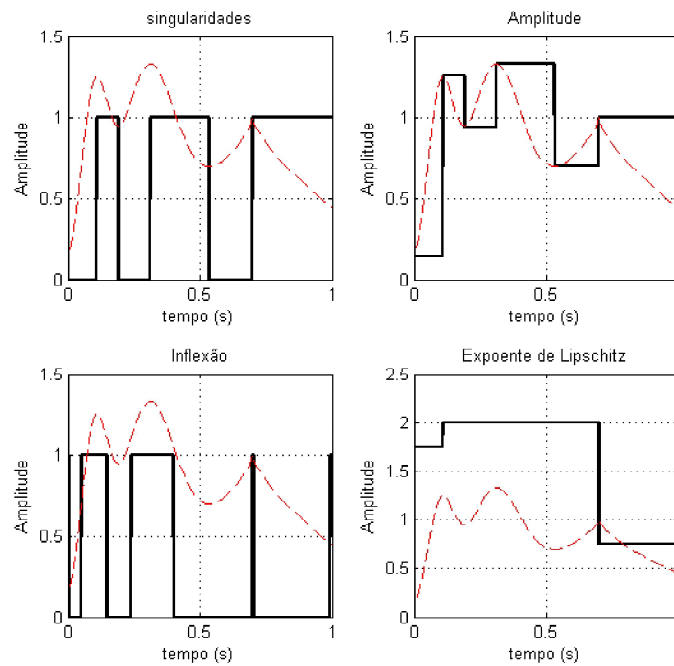


Figura 43 – Exemplo de sinal amostrado com uma singularidade.

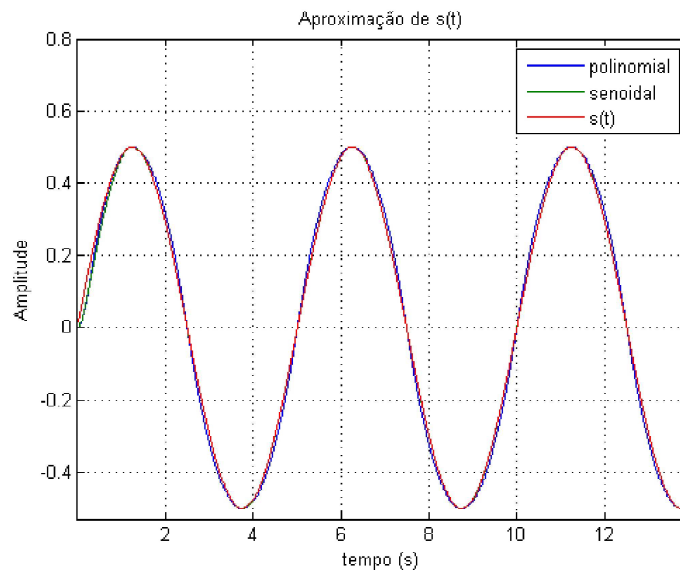


Figura 44 – Sinal senoidal recuperado através das duas funções de aproximação descritas neste trabalho.

11.5 Sistema a Nível de Circuito

Uma caracterização inicial foi feita nos circuitos implementados de forma a se verificar a viabilidade de implementar o sistema proposto, ou que aspectos precisam ser melhorados para viabilizá-lo. O primeiro circuito analisado foi a função logarítmica. Uma fonte de corrente de rampa de 0 a 100nA foi utilizada como estímulo neste circuito. A corrente de saída pode ser vista na Fig. 52.

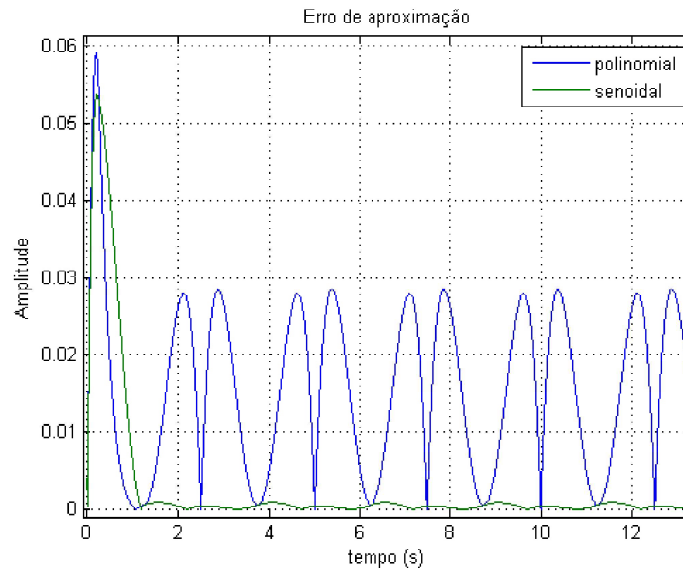


Figura 45 – Erro de aproximação do sinal senoidal para cada função de aproximação utilizada.

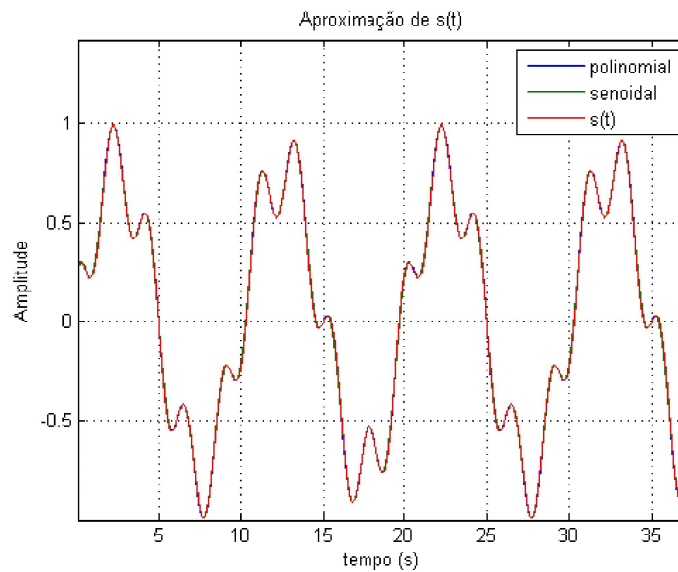


Figura 46 – Sinal com duas componentes senoidais recuperado com os dois aproximadores.

O mesmo estímulo em rampa de 0 a 100nA também foi usado no circuito de cálculo do Expoente de Lipschitz. A Figura 54 mostra o comportamento do sinal de saída. Deve-se resaltar que neste caso, o *offset* de corrente usado foi de 50nA. Isso significa que a magnitude vista por este circuito com relação a fonte de corrente de entrada é de 0 a 50nA positiva e negativamente.

Para o circuito de amostragem, duas fontes senoidais de tensão foram utilizadas. A primeira é o sinal a ser amostrado e a segunda representa a Transformada *Wavelet* com a gaussiana de primeira ordem. O sinal deve ser amostrado sempre que o valor do módulo da magnitude passar por zero. Neste caso, os sinais apresentam um *offset* de 0,9 V. Assim,

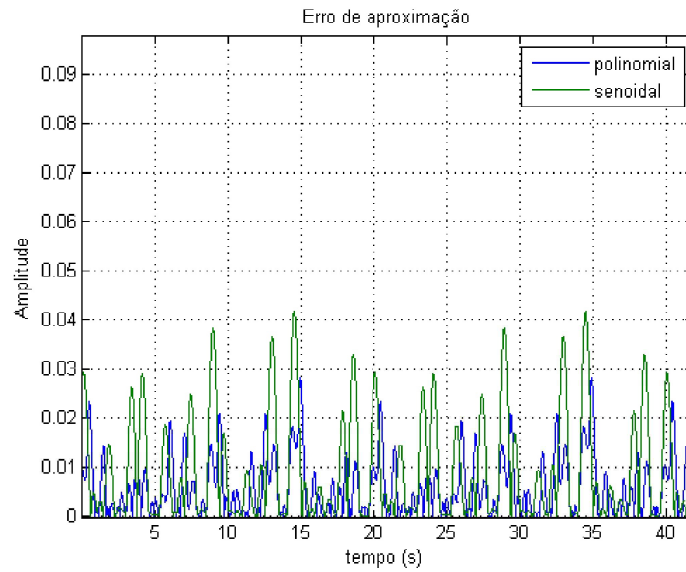


Figura 47 – Erro de aproximação do sinal com duas componentes senoidais para cada função de aproximação utilizada.

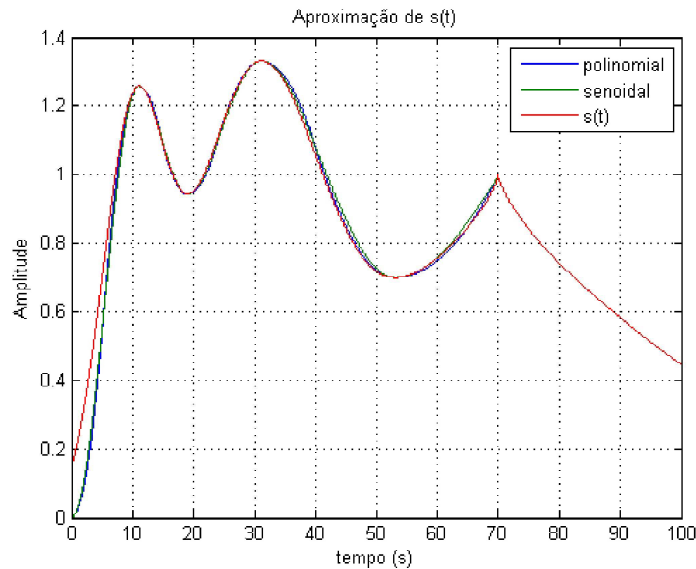


Figura 48 – Aproximação do sinal com uma singularidade em $t = 70$ para cada função de aproximação.

o sinal de entrada será amostrado sempre que o valor da *wavelet* passar por 0.9 V, tal como mostra a Fig. 56. A Figura 57 mostra a resposta do mesmo circuito quando um sinal qualquer é utilizado. Mais uma vez, a amostragem só ocorrerá em *zero crossings*.

Para verificar o sistema como um todo, gerou-se algumas escalas da Transformada *Wavelet* gaussiana de segunda ordem baseando-se na metodologia proposta em (HADDAD; SERDIJN, 2009) por meio de aproximação de Padé. A síntese dos circuitos foi feita utilizando componentes ideais como primeira versão e utilizando o método Ortonormal de espaço de estados. Os coeficientes utilizados são os mesmos obtidos

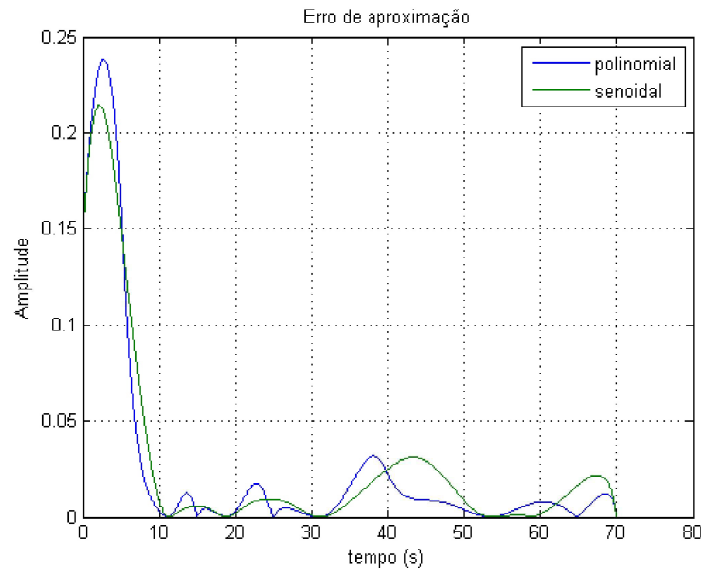


Figura 49 – Erro de aproximação do sinal com uma singularidade.

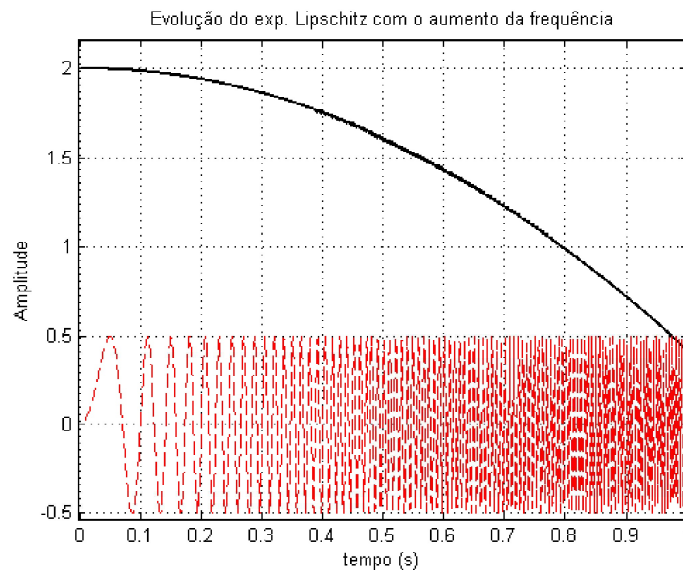


Figura 50 – Comportamento do expoente de Lipschitz com a frequência do sinal.

em (HADDAD; SERDIJN, 2009). Como a saída do circuito se dá em modo corrente, colocando-se um capacitor na saída do mesmo, pode-se obter a integral desta corrente em modo tensão. Assim, medindo-se a tensão neste capacitor será equivalente a medir a Transformada *Wavelet* gaussiana de primeira ordem. A Figura 58 mostra as *wavelets* gaussianas de segunda ordem obtidas em resposta ao impulso pelo circuito.

Por fim, o sistema de amostragem foi testado com duas senoides de diferentes frequências. Verificou-se que a diferença de simetria das *wavelets* geradas introduz um erro no cálculo do expoente de Lipschitz, ou seja, cada *wavelet* produzida precisa estar em mesma fase temporal. Entretanto, pode-se notar nas Figuras 59 e 60 que, na média, o expoente de Lipschitz tende a ser menor no sinal de frequência mais alta, tal como

Função	$EQM_1 \mu$	$EQM_2 \mu$	$SNR_1 \text{ dB}$	$SNR_2 \text{ dB}$
sinai 1	292.20	0.18996	26.3120	58.6473
sinai 2	96.568	154.32	39.4192	37.3834
sinai 3	70.086	205.06	35.1975	31.2993

Tabela 1 – Performance dos aproximadores

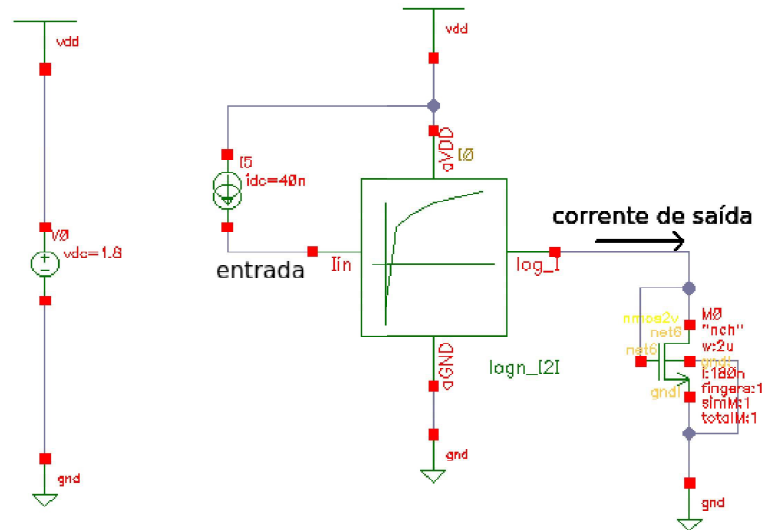


Figura 51 – Esquemático da simulação do circuito logaritmico.

denotado a Fig. 50. Note que os pontos onde a amplitude do sinal amostrado estão defasados com relação aos pontos de máximo e mínimo desejados.

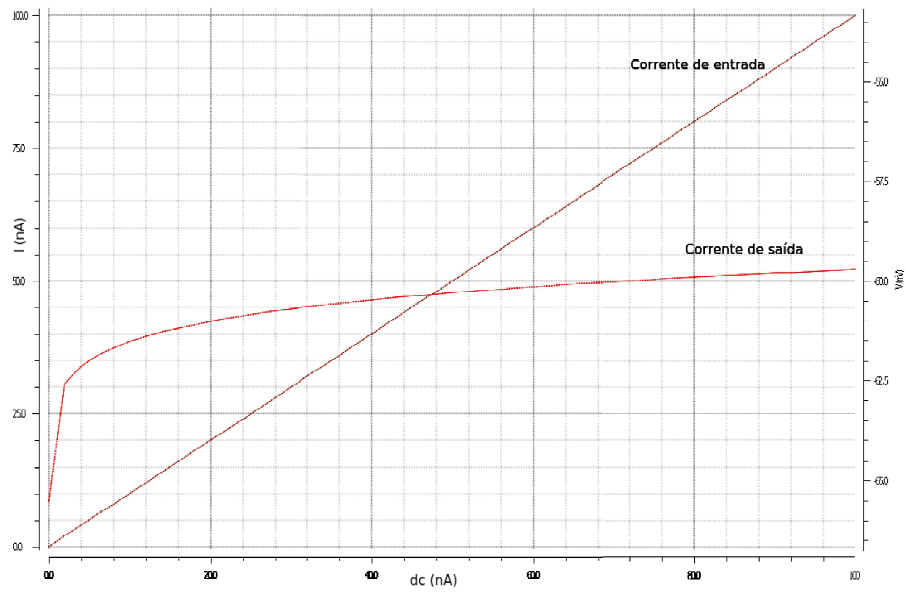


Figura 52 – Resultado da simulação do circuito logarítmico.

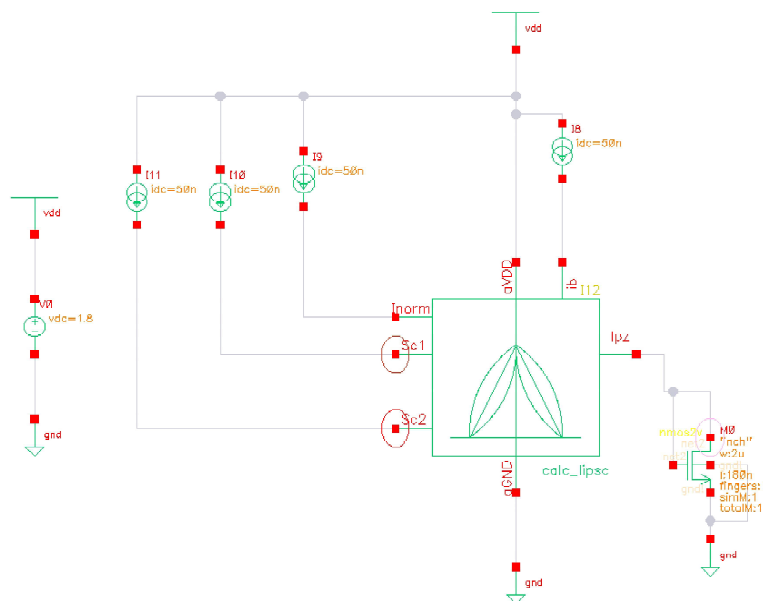


Figura 53 – Esquemático da simulação do circuito de cálculo do Lipschitz.

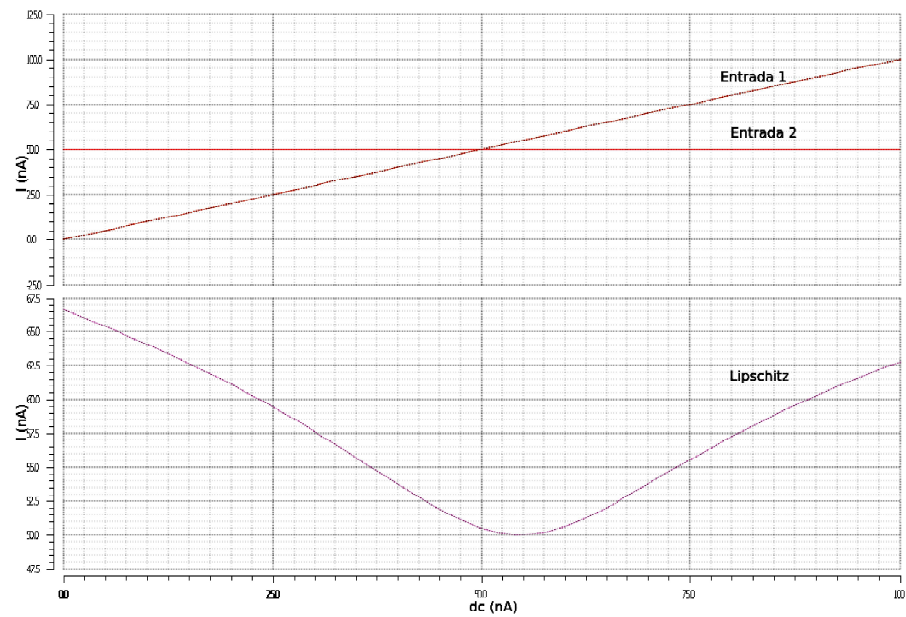


Figura 54 – Resultado da simulação do circuito de cálculo do Lipschitz.

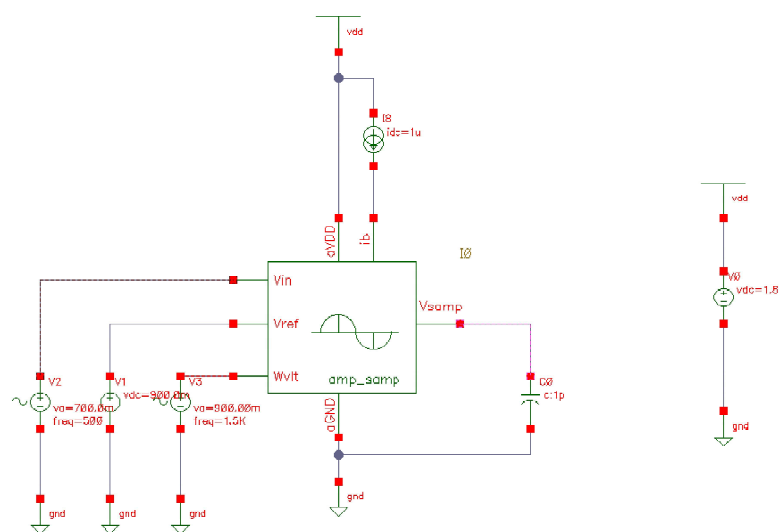


Figura 55 – Esquemático da simulação do circuito de amostragem.

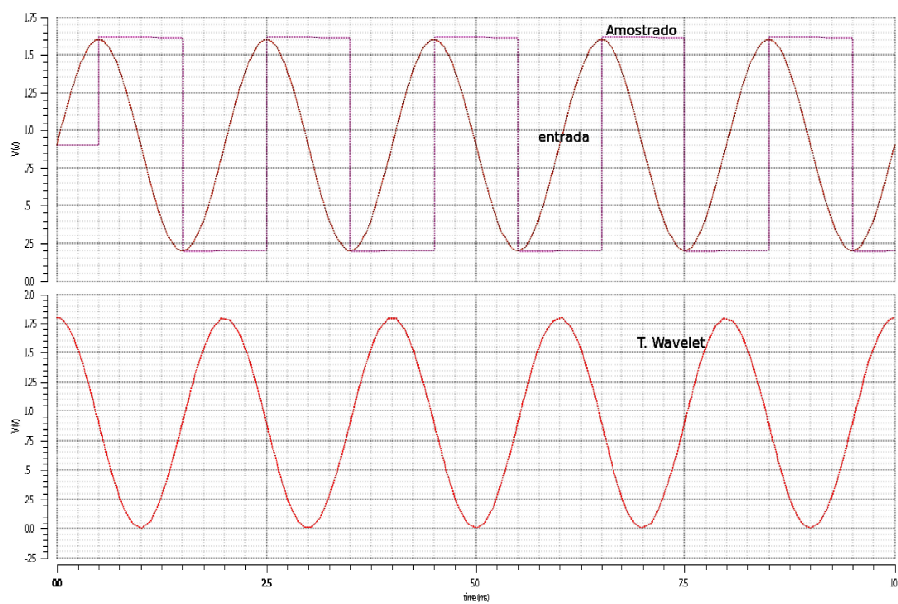


Figura 56 – Resultado da simulação do circuito de amostragem.

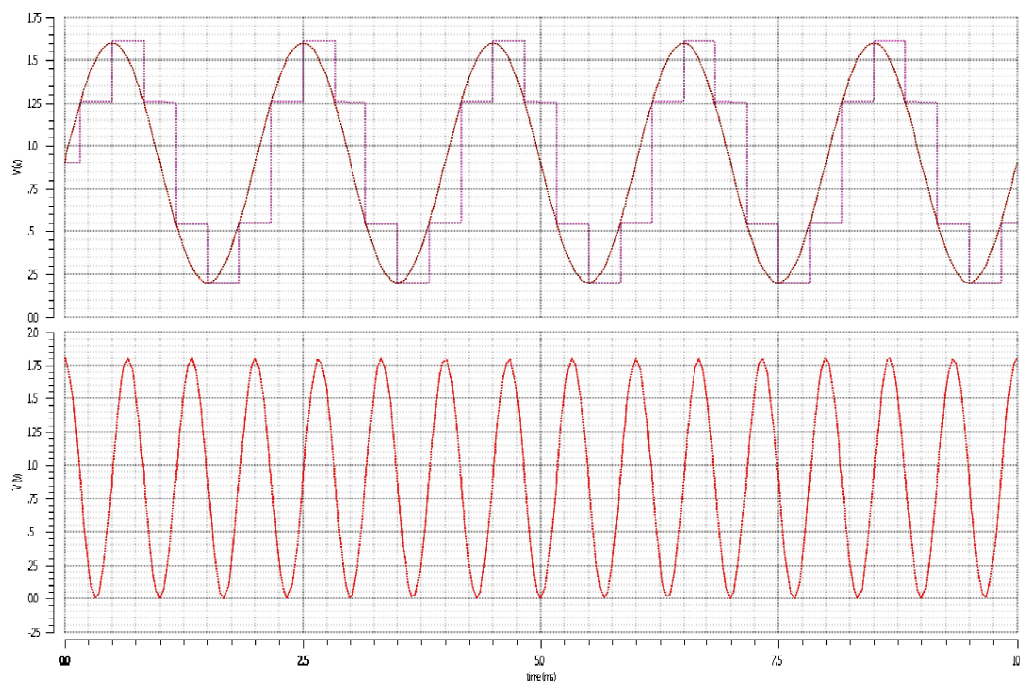


Figura 57 – Resultado da simulação do circuito de amostragem com um sinal de amostragem qualquer.

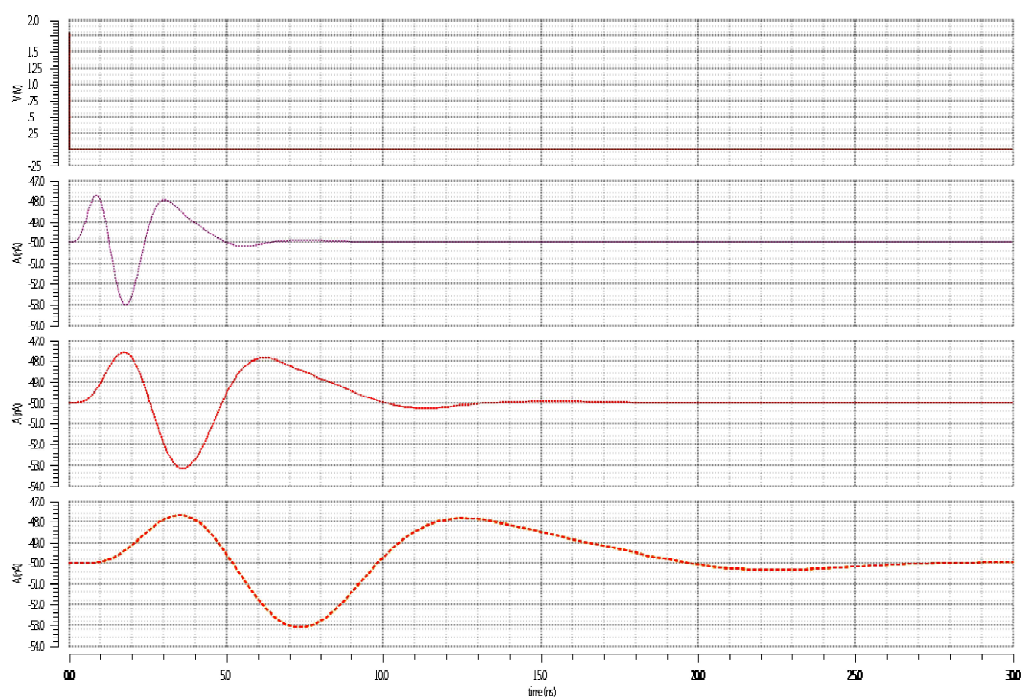


Figura 58 – Resposta ao impulso resultando em *wavelets* gaussianas de segunda ordem.

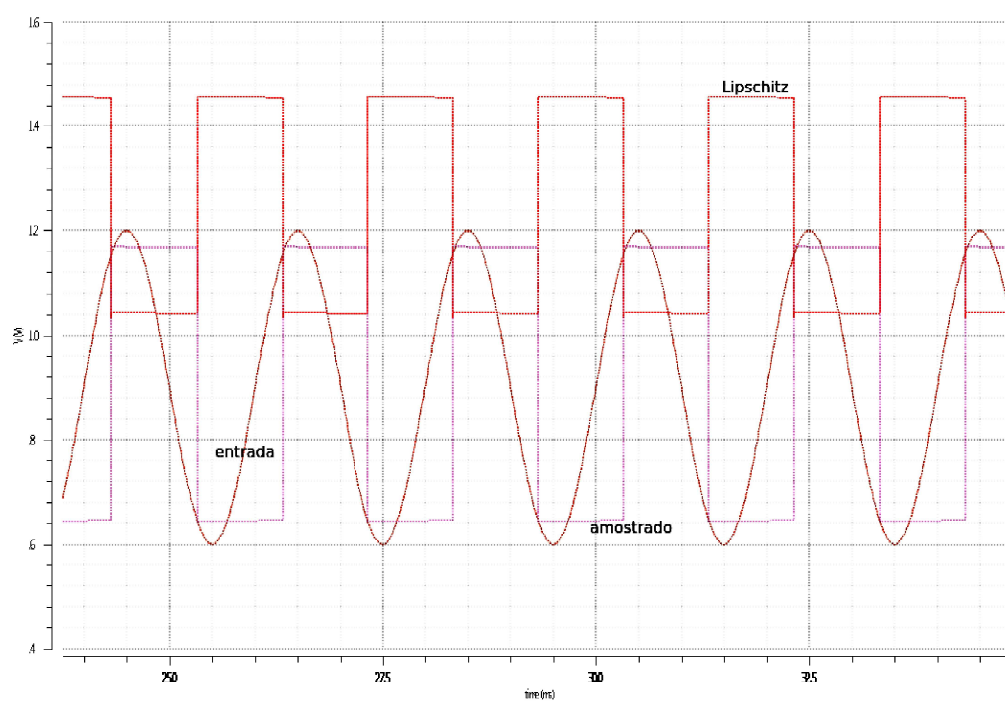


Figura 59 – Amostragem de um sinal senoidal.

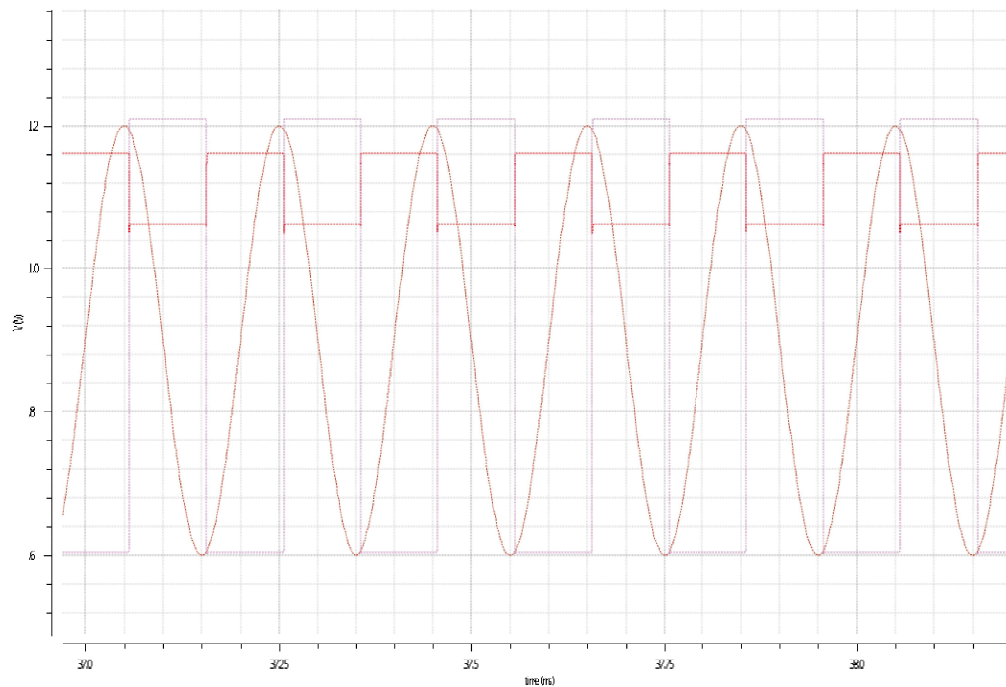


Figura 60 – Amostragem de um sinal senoidal de frequencia 10 vezes maior que o da Fig. 59.

12 Discussão

Através das propriedades da Transformada *Wavelet*, foi possível extrair parâmetros que permitiram amostrar apenas as características relevantes de um sinal de forma a possibilitar sua reconstrução e recuperando seu formato de maneira similar à original. Para tanto, a representação do sinal amostrado deve considerar as quatro informações extraídas, por exemplo, do sinal apresentado na Fig. 25: Localização dos pontos críticos no tempo, amplitude e o Lipschitz.

Verifica-se que houve uma compressão da informação do sinal, pois graças ao expoente de Lipschitz, sabe-se como o sinal se comporta em uma vizinhança. Além disso, deve-se ressaltar que entre um evento e máximo e mínimo local, só pode ocorrer a presença de inflexões. Esta informação nos garante que, na média, a função não poderá passar em amplitude de um máximo ou um mínimo local. Junto com esta informação, a distância temporal entre uma inflexão e um máximo local, ou mínimo local nos informa que a amplitude do sinal estará mais tempo próxima de um máximo, ou um mínimo local. Esta afirmação trás a tona uma questão: sabendo-se que um ponto de inflexão informa se, entre um intervalo de um máximo para um mínimo, a amplitude do sinal $s(t)$ permanece mais tempo próximo ou não de um máximo, seria possível aproximar o comportamento da função no mesmo intervalo sem a necessidade de se extrair o expoente de Lipschitz?

Como uma primeira resposta a esta questão, é possível aproximar o comportamento da função admitindo-se, entretanto, que o expoente de Lipschitz é sempre igual a 2. Porém, a aproximação de um comportamento singular deve ser feito através da dilatação ou compressão do valor de ν na Eq. 10.1. Certamente que, desta forma, seja esperada uma diminuição da qualidade da aproximação do sinal reconstruído, mas pode estar dentro de uma faixa de aceitação.

Com relação ao modelo produzido em *Simulink* foi, os resultados obtidos mostram que a forma de detecção de *zero-crossing* permitiu detectar os sinais sem a necessidade de escolha de valores de *threshold*. Isso permite uma maior sensibilidade do sinal a eventos de singularidades, que poderiam passar despercebidos na metodologia anterior. Além disso, verificou-se que os blocos e subsistemas implementados permitem sua síntese sob a forma de circuito analógico.

Sobre os sinais recuperados após a amostragem, a aproximação do sinal pelo algoritmo de recuperação ocorreu sem realizar a etapa de interpolação por *spline* de 5 ordem. Isso por que verificou-se que o valor obtido de cm permitia conformar a inclinação das duas funções aproximadoras no ponto de inflexão. Assim, a etapa de interpolação tornou-se opcional para os sinais estudados.

Para o terceiro sinal analisado, Nem todos os trechos foram recuperados. Isso por que o atual algoritmo de recuperação só permite aproximar informações que se encontrem entre mínimos e máximos. Como não há um evento destes entre a singularidade em $t = 70$ e a última amostra, não há informações sobre como o sinal se comporta após este evento.

Com relação ao desempenho obtido por cada aproximador, verificou-se que sua relação sinal ruído é menor que as de conversores que as dos conversores A/D considerados de alta resolução. Apesar disso, estes valores não permitem inferir se o desempenho do sistema de amostragem desenvolvido é melhor ou não que dos conversores A/D típicos, pois o desempenho deste sistema depende completamente do DAC utilizado. Isso significa que potencialmente é possível obter melhores aproximações do sinal trabalhado-se nos aproximadores e no algoritmo, pois as informações obtidas permitem traçar o perfil comportamental do sinal.

O modelo obtido a nível de circuito, como pode ser visto, ainda necessita de melhorias para permitir avaliar seu desempenho. Os resultados mostrados ilustram uma primeira tentativa em obtê-lo. Pode-se verificar que as operações matemáticas de logaritmo e cálculo do expoente de Lipschitz tiveram um funcionamento individual dentro do esperado. Em especial, o cálculo do Lipschitz de fato deve tender a um valor mais próximo de zero (ou do *offset* da corrente) a medida em que a amplitude das duas *wavelets* se aproxima. O circuito de amostragem também se mostrou funcional, pois foi possível amostrar o sinal em eventos de *zero-crossing*. Entretanto, o sistema não apresentou os resultados esperados tais como os do modelo Simulink projetado. Isso por que as *wavelets* usadas no modelo Simulink eram simétricas com relação a um mesmo eixo de simetria. Entretanto, as obtidas a nível de circuito apresentavam um atraso τ crescente a uma razão de 2 vezes com relação ao atraso da escala anterior. Para que seja possível minimizar este efeito, recomenda-se que haja uma compensação deste atraso de forma a colocá-las em fase.

13 Conclusão

Este trabalho procurou mostrar alguns aspectos que permitiram viabilizar a implementação de um conversor A/D para aplicações de alta resolução e baixo consumo. Estas duas características podem ser viabilizadas em razão do modo como a amostragem é feita, não necessitando amostrar constantemente, tal como os conversores tradicionais.

Através do conteúdo exposto, foi possível perceber o grande potencial que a análise através da Transformada *Wavelet* permite por apresentar propriedades como boa localização no plano tempo-frequência, análise em escalas filtragem do sinal. Entretanto, para este trabalho, uma das propriedades mais importantes são os *vanishing moments*, que tornam a transformada um operador diferencial e permitindo a localização de pontos críticos de uma função ou sinal através do *zero-crossing*. Além disso, graças a esta propriedade, é possível estimar o expoente de Lipschitz.

Verificou-se também que, graças ao expoente de Lipschitz, pode-se pensar que a amostragem proposta se trata da amostragem de não apenas um ponto, mas uma vizinhança do sinal. Isso por que o Lipschitz fornece o comportamento do sinal nesta vizinhança.

Com relação ao modelo obtido em Simulink, pode-se verificar que o mesmo conseguiu cumprir com o propósito do método de amostragem proposto e fornecer as informações necessárias para recuperar o sinal amostrado. Para o algoritmo de recuperação, verifica-se que as informações de saída apresentam valores de SNR medianos e que não foi possível obter a alta resolução esperada. Entretanto, todas as informações necessárias para recuperar o sinal estão são obtidas pelo sistema de amostragem. O erro do sinal de saída pode ser diminuído encontrando-se uma função de aproximação mais eficiente e adequada e melhorando o algoritmo de recuperação.

Foi possível também obter um sistema que permite ser implementado a nível de circuito. Individualmente, os blocos implementados apresentam um funcionamento coerente. Porém, melhorias como ajuste de fase das *wavelets* podem permitir corrigir os erros presentes na amostragem do sinal e do Lipschitz.

Por fim, conclui-se que um objetivo fundamental foi alcançado neste trabalho que é a compactação da informação a ser amostrada por meio da amplitude e do Lipschitz a se obtido, além da localização no tempo de máximos, mínimos, singularidades e inflexões. Essencialmente, a metodologia proposta se mostra como um sistema de amostragem orientada a eventos. A etapa de quantização não foi atacada neste trabalho. Assim os valores amostrados para o Lipschitz e para a amplitude precisam ainda passar por alguma forma de quantização, porém, a uma taxa menor que os sistemas tradicionais.

Espera-se que os resultados obtidos neste trabalho contribuam para a área de processamento de sinais analógicos de baixa potência. Para trabalhos futuros espera-se pretende-se realizar melhorias no modelo a nível de circuito apresentado neste trabalho e realizar um estudo mais aprofundado a cerca de possíveis funções de aproximação.

Referências

- ALLEN, P. E.; HOLBERG, D. R. *CMOS Analog Circuit Design*. [S.l.]: Oxford University Press, 2002. ISBN 0195116445. Citado 4 vezes nas páginas 17, 23, 24 e 51.
- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 8. ed. [S.l.]: Bookman, 2001. ISBN 9788573078473. Citado na página 57.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. [S.l.]: LTC, 2011. ISBN 978521617563. Citado na página 27.
- CARUSONE, T. C.; JOHNS, D. A.; MARTIN, K. W. *Analog Integrated Circuit Design*. [S.l.]: ed. Wiley, 2012. ISBN 0470770104. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 23.
- GARBOR, D. *Theory of communication*. [S.l.]: Institution of Electrical Engineering, 1946. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 31.
- HADDAD, S. A. P.; SERDIJN, W. A. *Ultra Low-Power Biomedical Signal Processing: An Analog Wavelet Filter Approach for Pacemakers*. [S.l.]: Ed. Springer, 2009. ISBN 9781402090738. Citado 9 vezes nas páginas 19, 32, 33, 34, 35, 36, 58, 75 e 76.
- LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 3. ed. [S.l.]: Harbra, 1994. Citado na página 41.
- MALLAT, S. *A Wavelet tour of signal processing*. [S.l.]: Academic Press, 1999. ISBN 978-0124666061. Citado 6 vezes nas páginas 27, 32, 33, 35, 36 e 42.
- MALLAT, S.; HWANG, W. L. Singularity detection and processing with wavelets. In: *IEEE Transactions on Information Theory*. [S.l.: s.n.], 1992. v. 38, n. 2, p. 617–643. Citado na página 18.